1. Rappresenta graficamente la curva rappresentata dall'equazione: $x^2 + y^2 - 4|x| + 2|y| = 0$.

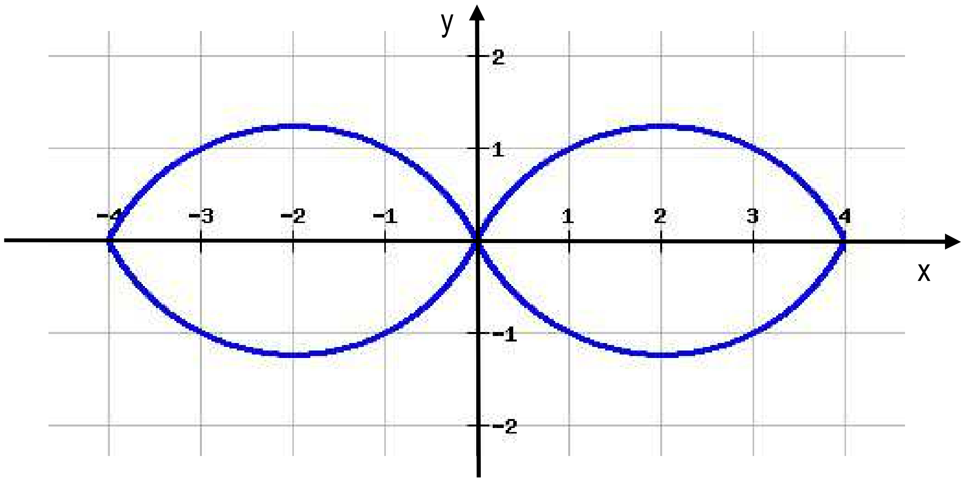
Poiché:

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} \quad e \quad |y| = \begin{cases} y & se\ y \geq 0 \\ -y & se\ y < 0 \end{cases}$$

allora l'equazione data risulta equivalente all'unione delle soluzioni dei quattro sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0\ e\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0\ e\ y < 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0\ e\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0\ e\ y < 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

- La rappresentazione delle soluzioni del primo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ contenuti nel primo quadrante. La circonferenza ha centro $(2;\ -1)$ e passa per l'origine degli assi.
- La rappresentazione delle soluzioni del secondo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ contenuti nel quarto quadrante. La circonferenza ha centro $(2;\ 1)$ e passa per l'origine degli assi.
- La rappresentazione delle soluzioni del terzo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ contenuti nel secondo quadrante. La circonferenza ha centro $(-2;\ -1)$ e passa per l'origine degli assi.
- La rappresentazione delle soluzioni del quarto sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ contenuti nel terzo quadrante. La circonferenza ha centro $(-2;\ 1)$ e passa per l'origine degli assi.



2. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $x - \sqrt{25 - x^2} < 1$.

Isoliamo la radice a destra del segno di disuguaglianza: $x - 1 < \sqrt{25 - x^2}$. Dai due membri della disequazione ottenuta, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

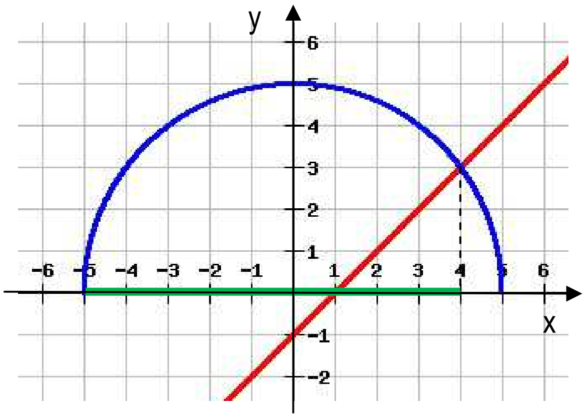
$$y = \sqrt{25 - x^2} \qquad e \qquad y = x - 1.$$

La prima funzione è equivalente al sistema: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

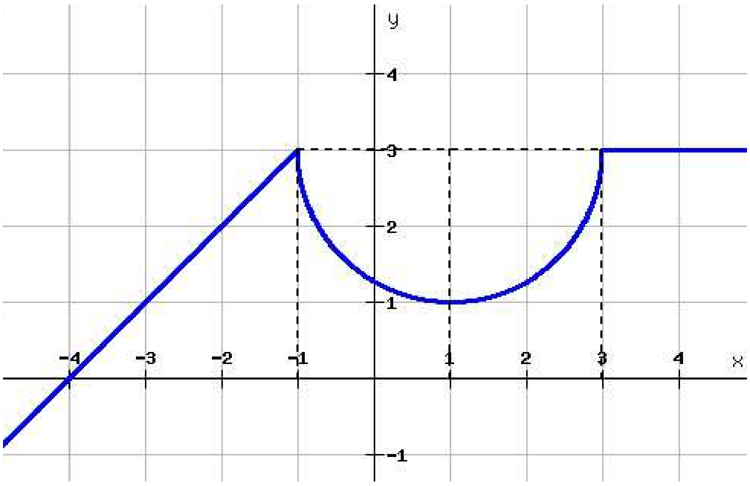
che rappresenta una semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5.
Il dominio di questa funzione è: $-5 \leq x \leq 5$.

La seconda funzione corrisponde alla retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante, passante per il punto $(0;\ -1)$.

Dal grafico possiamo dedurre la soluzione: $\mathbf{-5 \leq x < 4}$.



3. Trova l'equazione corrispondente al seguente grafico, utilizzando i dati della figura:



La prima parte del grafico, quella per $x < -1$ è una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante, che intercetta l'asse y nel punto di ordinata 4, perciò ha equazione: $y = x + 4$.

La seconda parte del grafico è una semicirconferenza di centro C (1; 3) e raggio 2:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad y - 3 = -\sqrt{4-(x-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad y = 3 - \sqrt{3 - x^2 + 2x}$$

L'ultima parte del grafico è una retta parallela all'asse x di equazione $y = 3$.

Riassumendo:

$$y = \begin{cases} x + 4 & se\ x < -1 \\ 3 - \sqrt{3 - x^2 + 2x} & se\ -1 \leq x \leq 3 \\ 3 & se\ x > 3 \end{cases}$$

4. Dopo aver studiato la natura del fascio $x^2 + y^2 - 2x + ky = 8$, determina i valori di k in modo che la circonferenza:
   a. passi per il punto (1; 3);
   b. abbia il centro sulla retta 3x – 2y = 14;
   c. abbia il raggio uguale a 5;
   d. abbia il centro che dista $2\sqrt{2}$ dalla bisettrice di secondo e quarto quadrante.

Per determinare la natura del fascio, determino le due circonferenze generatrici: $x^2 + y^2 - 2x - 8 + ky = 0$.
La prima è la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ e la seconda è la circonferenza degenere $y = 0$, ovvero l'asse x.

Determino le intersezioni tra la circonferenza e l'asse x:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \langle \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

Si tratta di un fascio di circonferenze **secanti** che si incontrano nei punti $(4; 0)$ e $(-2; 0)$.

a. Per determinare il valore di k in modo che la circonferenza passi per il punto (1; 3), sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$1 + 9 - 2 - 8 + 3k = 0 \qquad \boldsymbol{k = 0}$$

b. Per determinare il valore di k in modo che la circonferenza abbia il centro sulla retta 2x – 3y = 14, determino innanzi tutto le coordinate generiche del centro: $C\left(1; -\frac{k}{2}\right)$.
Sostituisco le generiche coordinate nell'equazione della retta, per determinare il valore di k:

$$3 - 2 \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) = 14 \qquad 3 + k = 14 \qquad \boldsymbol{k = 11}$$

c. Per determinare il valore di k in modo che la circonferenza abbia raggio uguale a 5, determino innanzi tutto il raggio generico:

$$r = \sqrt{1 + \frac{k^2}{4} + 8} = \sqrt{9 + \frac{k^2}{4}}$$

Ora lo pongo uguale a 5:

$$\sqrt{9 + \frac{k^2}{4}} = 5 \quad \Rightarrow \quad 9 + \frac{k^2}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2}{4} = 16 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm 8}$$

d. La bisettrice di secondo e quarto quadrante ha equazione x + y = 0 e pongo la distanza del generico centro (determinato nel punto b) dalla bisettrice uguale a $2\sqrt{2}$:

$$\frac{\left|1 - \frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |2 - k| = 8 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \pm 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k_1 = 10 \quad k_2 = -6}$$

5. Date le circonferenze: $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ e $x^2+y^2-8x+7=0$, trova l'equazione della circonferenza che passa per i loro punti di intersezione e per il punto $P\left(2;\frac{3}{2}\right)$.

Determino il fascio individuato dalle due circonferenze date: $x^2+y^2-4x-4y+3+k\,(x^2+y^2-8x+7)=0$, ovvero:

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2-4\,(1+2k)x-4y+3+7k=0$$

Sostituisco le coordinate del punto P nell'equazione del fascio e determino così il valore di k:

$$4\,(k+1)+\frac{9}{4}\cdot(k+1)-8\,(1+2k)-6+3+7k=0$$

$$16k+16+9k+9-32-64k-24+12+28k=0$$

$$11k+19=0 \qquad k=-\frac{19}{11}$$

Sostituendo questo valore di k nell'equazione del fascio, trovo l'equazione della circonferenza richiesta:

$$\left(-\frac{19}{11}+1\right)x^2+\left(-\frac{19}{11}+1\right)y^2-4\left(1-\frac{38}{11}\right)x-4y+3-\frac{133}{11}=0$$

$$-\frac{8}{11}x^2-\frac{8}{11}y^2+\frac{108}{11}x-4y-\frac{100}{11}=0$$

$$\mathbf{2x^2+2y^2-27x+11y+25=0}$$