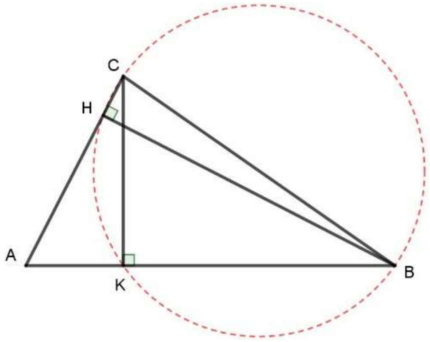
1. Nel triangolo acutangolo ABC, dopo aver tracciato le altezze BH e CK (riferite rispettivamente ai lati AC e AB), dimostra che $B\widehat{H}K \cong B\widehat{C}K$.

Hp:
$C\hat{A}B < \frac{\pi}{2}$
$A\hat{B}C < \frac{\pi}{2}$
$B\hat{C}A < \frac{\pi}{2}$
$BH \perp AC, H \in AC$
$CK \perp AB, K \in AB$

Tesi:
$B\widehat{H}K \cong B\hat{C}K$



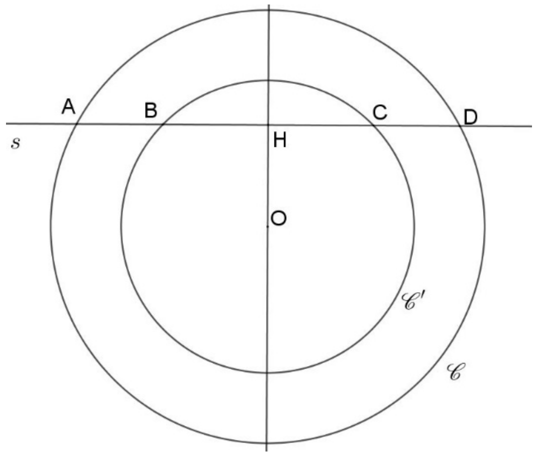
Il quadrilatero KBCH è inscrivibile in una circonferenza, infatti: $C\widehat{H}B \cong \frac{\pi}{2}$ per ipotesi e un triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza in cui l'ipotenusa BC coincide con il diametro. Analogamente $C\widehat{K}B \cong \frac{\pi}{2}$ e quindi il triangolo è inscrivibile in una circonferenza, in cui l'ipotenusa BC coincide con il diametro.
$B\widehat{H}K \cong B\hat{C}K$ perché angoli alla circonferenza sottesi dallo stesso arco BK.

$c.v.d.$

2. Una retta s interseca due circonferenze concentriche nei punti, nell'ordine, A, B, C e D. Dimostra che $AB \cong CD$.

Hp:
$\mathcal{C}, O, r \qquad \mathcal{C}', O, r'$
$s \cap \mathcal{C} = \{A; D\}$
$s \cap \mathcal{C}' = \{B; C\}$

Tesi:
$AB \cong CD$



Traccio la retta t perpendicolare ad s e passante per il centro delle circonferenze, determinando il punto H nell'intersezione con la retta s.
Siccome la retta è perpendicolare alle corde e passa per il centro delle circonferenze, divide le corde a metà, ovvero:

$$BH \cong HC \qquad AH \cong HD$$

Dato che $AB \cong AH - BH$ e $CD \cong HD - HC$, $AB \cong CD$, perché differenza di segmenti congruenti.

3. Nel triangolo ABC che ha l'incentro in P, gli angoli $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ hanno ampiezze rispettivamente di $50°$ e $76°$. Determina l'ampiezza di $A\hat{P}B$, $B\hat{P}C$ e $C\hat{P}A$.

Essendo il punto P l'incentro del triangolo, esso è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli interni del triangolo, quindi:

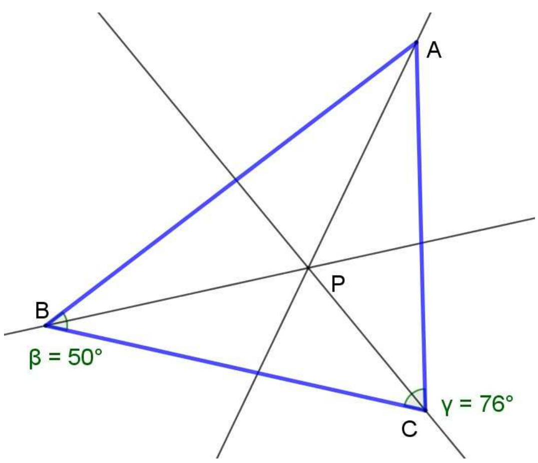
$$A\hat{B}P \cong P\hat{B}C \cong 25° \qquad B\hat{C}P \cong P\hat{C}A \cong 38°$$

Posso quindi determinare l'angolo $C\hat{P}B$, perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°:

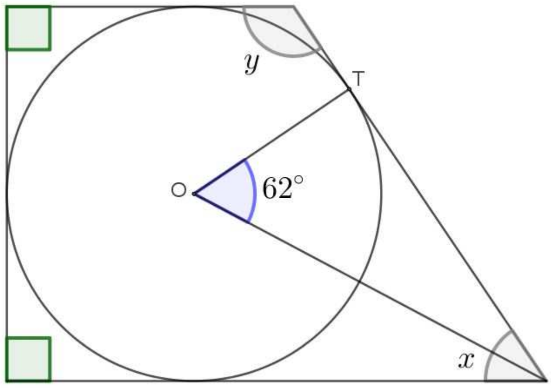
$$C\hat{P}B \cong 180° - P\hat{B}C - B\hat{C}P \cong \mathbf{117°}$$

Allo stesso modo posso determinare il terzo angolo del triangolo ABC e, dal fatto che è diviso a metà dalla bisettrice, posso determinare gli altri due angoli richiesti:

$$C\hat{A}B \cong 180° - A\hat{B}C - B\hat{C}A \cong 54°$$
$$C\hat{P}A \cong 180° - P\hat{C}A - C\hat{A}P \cong \mathbf{115°}$$
$$A\hat{P}B \cong 180° - A\hat{B}P - P\hat{A}B \cong \mathbf{128°}$$



4. Trova le misure degli angoli indicati con le lettere x e y, sapendo che T è il punto di tangenza.



Dato che OT è il raggio tracciato per il punto di tangenza, l'angolo in T è retto. Possiamo quindi determinare il terzo angolo del triangolo che è complementare dell'angolo indicato, di 62°, e quindi vale 28°.
L'angolo di 28° è esattamente metà dell'angolo x, in quanto, per il teorema delle tangenti, la semiretta che congiunge il punto da cui sono condotte le tangenti con il centro della circonferenza è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti, perciò $x \cong 56°$.
Visto che i due lati adiacenti agli angoli x e y sono paralleli tra loro, in quanto perpendicolari a una stessa retta, allora gli angoli x e y sono coniugati interni e quindi supplementari, perciò $y \cong 124°$.

5. Il perimetro di un quadrilatero PQRS è $264\ cm$. Se PQ è il triplo di RS e la loro differenza è $66\ cm$, il quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza?

Pongo: $\overline{RS} = x$ e $\overline{PQ} = 3x$. Visto che la loro differenza è 66 cm:

$$3x - x = 66 \qquad 2x = 66 \qquad x = 33$$

Perciò: $\overline{RS} = 33\ cm$ e $\overline{PQ} = 99\ cm$. La loro somma è quindi $132\ cm$, ovvero la metà del perimetro. La somma di due lati opposti è quindi congruente alla somma degli altri due e il quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza.

6. Il perimetro di un triangolo isoscele è $128\ m$ e i $\frac{3}{4}$ del lato superano di $15\ m$ i $\frac{5}{16}$ della base. Determina la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

Indico i lati del triangolo isoscele con x: $\overline{AC} = \overline{BC} = x$.

Siccome il perimetro è di 128 m ed è dato dalla somma dei tre lati:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 128 \qquad \overline{AB} = 128 - 2x$$

Posso quindi usare l'ultima relazione:

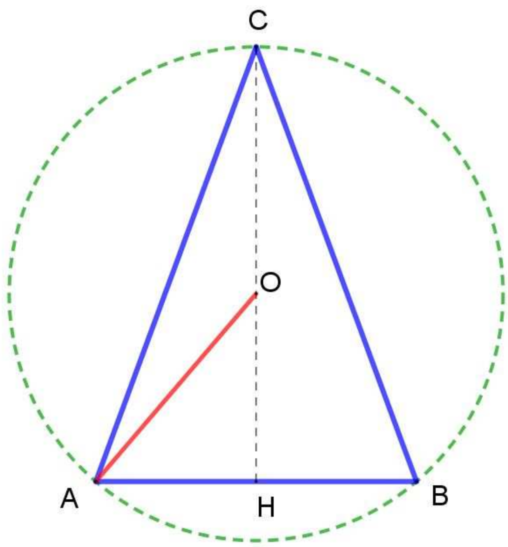
$$\frac{3}{4}\overline{AC} = 15 + \frac{5}{16}\overline{AB}$$

sostituendo al posto dei lati la loro espressione in x:

$$\frac{3}{4}x = 15 + \frac{5}{16}(128 - 2x)$$

$$\frac{3}{4}x = 15 + 40 - \frac{5}{8}x \qquad \frac{11}{8}x = 55 \qquad x = 40$$

Perciò: $\overline{AC} = \overline{BC} = 40\ cm$ e $\overline{AB} = 128\ cm - 2x = 48\ cm.$



Per determinare il raggio della circonferenza circoscritta, indico con x il raggio OA da determinare. E siccome anche OC è raggio della circonferenza (essendo O il centro), $\overline{OH} = \overline{CH} - x = 32 - x$, dove la misura di CH è stata determinata con il teorema di Pitagora:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = 32\ cm$$

e sapendo che AH è metà della base, in quanto in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base coincide con la mediana.

Applicando di nuovo il teorema di Pitagora al triangolo AHO, otteniamo il valore x del raggio:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 \qquad x^2 = 24^2 + (32 - x)^2 \qquad x^2 = 24^2 + 32^2 - 64\,x + x^2$$

$$64\,x = 24^2 + 32^2 \qquad x = \frac{8^2\,(3^2 + 4^2)}{64} = 25 \qquad r = \overline{AO} = \mathbf{25\ cm}$$