1. $\left(x\sqrt{3}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=4x^2$

$3x^2+1-2x\sqrt{3}+x^2-3=4x^2 \qquad -2x\sqrt{3}=2 \qquad x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}-\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\frac{4}{x^2-2}$

$\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)^2-\left(x-\sqrt{2}\right)^2-4}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}=0 \qquad C.A.:\ x\neq\pm\sqrt{2}$

$x^2+2+2x\sqrt{2}-x^2-2+2x\sqrt{2}-4=0 \qquad 4x\sqrt{2}=4 \qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \boldsymbol{acc.}$

3. $\begin{cases} x+2y=2\sqrt{2} \\ x+y=-\sqrt{2} \end{cases}$

Sottraggo la seconda equazione dalla prima, applicando il metodo di eliminazione, poi sostituisco il valore di y trovato nella prima:

$\begin{cases} x+2y=2\sqrt{2} \\ -x-y=\sqrt{2} \end{cases}$
$\overline{\quad y=3\sqrt{2}\quad}$

$x+6\sqrt{2}=2\sqrt{2} \qquad \begin{cases} x=-4\sqrt{2} \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x\sqrt{2}-y=3\sqrt{10} \\ -x+y\sqrt{2}=\sqrt{2} \end{cases}$

Moltiplico la seconda equazione per $\sqrt{2}$ e poi sommo le due equazioni procedendo con il metodo di eliminazione. Determinato il valore di y, posso procedere ricavando la x dalla seconda equazione, dopo aver sostituito a y il suo valore.

$\begin{cases} x\sqrt{2}-y=3\sqrt{10} \\ -x\sqrt{2}+2y=2 \end{cases}$
$\overline{\quad y=2+3\sqrt{10}\quad}$

$-x+2\sqrt{2}+6\sqrt{5}=\sqrt{2} \qquad \begin{cases} x=6\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=2+3\sqrt{10} \end{cases}$

5. $\left(3-\sqrt{5}\right)(x+2) > x\sqrt{5}+3$

$3x+6-x\sqrt{5}-2\sqrt{5} > x\sqrt{5}+3 \qquad 3x-2x\sqrt{5} > -3+2\sqrt{5} \qquad x\left(3-2\sqrt{5}\right) > -\left(3-2\sqrt{5}\right) \qquad \boldsymbol{x < -1}$

6. $\begin{cases} -x\sqrt{3}+x < \sqrt{3}+1 \\ x\sqrt{2}-3 > x-\left(\sqrt{2}+1\right) \end{cases}$

Risolvo le due disequazioni singolarmente:

$A:\ -x\left(\sqrt{3}-1\right) < 1+\sqrt{3} \qquad x > -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \qquad x > -2-\sqrt{3}$

$B:\ x\left(\sqrt{2}-1\right) > 3-\sqrt{2}-1 \qquad x > \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1} \qquad x > \sqrt{2}$

$\boldsymbol{x > \sqrt{2}}$

7. $x^2-x\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6} \leq 0$

$x^2-x\sqrt{2}-x\sqrt{3}+\sqrt{6} \leq 0 \qquad x\left(x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0 \qquad \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) \leq 0$

Procedendo con lo studio dei segni, ottengo:

$\boldsymbol{\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}}$

8. $\left|1-x\sqrt{5}\right|+x < \sqrt{5}$

Distinguo due casi:

$1-x\sqrt{5} \geq 0 \qquad x \leq \frac{\sqrt{5}}{5}:\ \ 1-x\sqrt{5}+x < \sqrt{5} \qquad x\left(1-\sqrt{5}\right) < -\left(1-\sqrt{5}\right) \qquad x > -1$

Intersecando la condizione con la soluzione, ottengo:

$\boldsymbol{-1 < x \leq \frac{\sqrt{5}}{5}}$

$1-x\sqrt{5} < 0 \qquad x > \frac{\sqrt{5}}{5}:\ \ -1+x\sqrt{5}+x < \sqrt{5} \qquad x\left(1+\sqrt{5}\right) < 1+\sqrt{5} \qquad x < 1$

Intersecando la condizione con la soluzione, ottengo:

$\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5} < x < 1}$

Unendo i due risultati parziali, ottengo: $\boldsymbol{-1 < x < 1}$