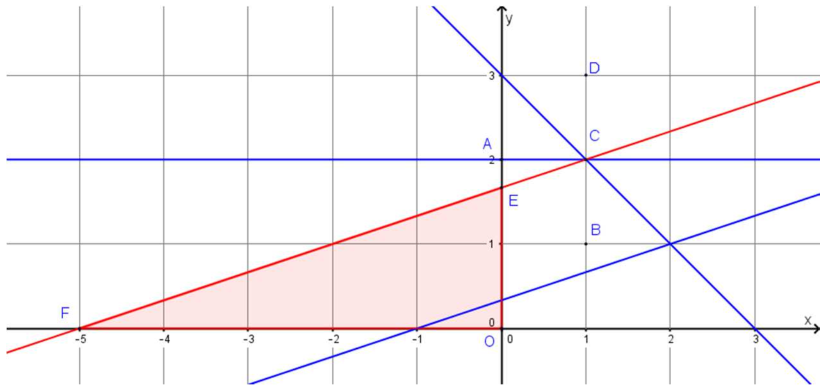
1. Determina l'equazione della retta parallela alla retta $x-3y+1=0$, condotta per il centro della circonferenza passante per i punti $(0;2)$, $(1;1)$, $(1;3)$ e trova l'area del triangolo che questa retta forma con gli assi cartesiani.



Devo determinare le coordinate del centro della circonferenza, perciò traccio gli assi dei segmenti AD e BD: dalla loro intersezione, determino il centro della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-3)^2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+2y=6 \\ y=2 \end{cases} \qquad C(1;2)$$

Impongo il passaggio per C di una retta parallela alla retta data di coefficiente angolare $\frac{1}{3}$ (indicata in rosso nel grafico):

$$y-2=\frac{1}{3}(x-1) \qquad y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

Determino le intersezioni della retta così trovata con gli assi:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases} \qquad F(-5;0) \qquad\qquad \begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{5}{3} \end{cases} \qquad E\left(0;\frac{5}{3}\right)$$

I segmenti OE e OF, del triangolo OEF di cui devo determinare l'area, corrispondono al valore assoluto, rispettivamente, dall'ordinata di E e dell'ascissa di F, perciò:

$$A_{OEF}=\frac{1}{2}y_E\cdot|x_F|=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot 5=\mathbf{\frac{25}{6}}$$

2. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale:

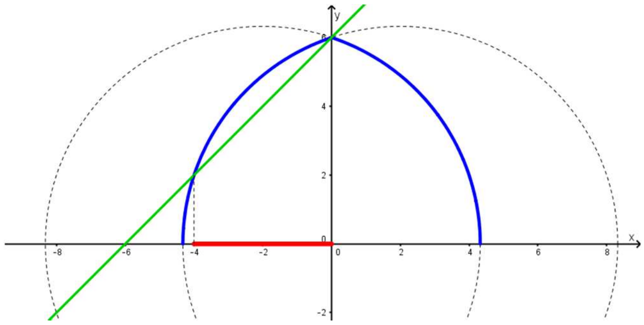
$$\sqrt{36-4\,|x|-x^2} \geq x+6$$

Considero l'arco di circonferenza e la retta di equazione, rispettivamente:

$$y=\sqrt{36-4|x|-x^2} \qquad\qquad y=x+6$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2+y^2+4x-36=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ x < 0 \\ x^2+y^2-4x-36=0 \end{cases}$$

L'arco di circonferenza è costituito da due archi, uno nel primo quadrante, di centro $(-2;0)$ e raggio $2\sqrt{10}$, l'altro nel secondo quadrante, di centro $(2;0)$ e raggio $2\sqrt{10}$.



Dopo aver rappresentato anche la retta, determino i due punti di intersezione che hanno, rispettivamente, ascissa – 4 e 0. La soluzione è indicata in rosso nel disegno:

$$\mathbf{-4 \leq x \leq 0}$$

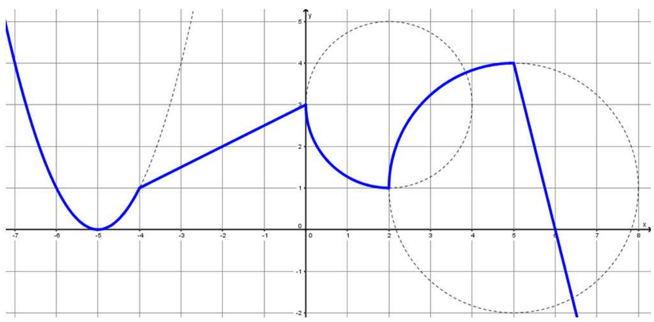
3. Determina l'equazione del seguente grafico:

Il primo tratto, per $x \leq -4$, è una parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V_1\ (-5;0)$ e tangente all'asse x:

$$y=(x+5)^2$$

Il secondo tratto, per $-4 < x \leq 0$, è la retta di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ e ordinata all'origine 3:

$$y=\frac{1}{2}x+3$$



Il terzo tratto, per $0 < x \leq 2$, è un arco di circonferenza con centro in $(2;3)$ e raggio 2:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4 \qquad\qquad y=3-\sqrt{4x-x^2}$$

Il quarto tratto, per $2 < x \leq 5$, è un arco di circonferenza con centro in $(5;1)$ e raggio 3:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=9 \qquad\qquad y=1+\sqrt{-16+10x-x^2}$$

L'ultimo tratto, per $x > 5$, è è la retta di coefficiente angolare -4 e passante per il punto dell'asse x di ascissa 6, perciò:

$$y-0=-4\,(x-6) \qquad\qquad y=-4x+24$$

Concludendo:

$$y=\begin{cases} \mathbf{x^2+10x+25} & \mathbf{se\ x \leq -4} \\ \mathbf{\frac{1}{2}x+3} & \mathbf{se\ -4 < x \leq 0} \\ \mathbf{3-\sqrt{4x-x^2}} & \mathbf{se\ \ 0 < x \leq 2} \\ \mathbf{1+\sqrt{-16+10x-x^2}} & \mathbf{se\ 2 < x \leq 5} \\ \mathbf{-4x+24} & \mathbf{se\ x > 5} \end{cases}$$

4. I punti $A(-3;\ -1)$, $B(4;3)$ e $C(1;5)$ sono i vertici di un triangolo. Determina l'equazione della circonferenza di centro C e tangente al lato AB del triangolo. Verifica inoltre la seguente relazione: $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\frac{25}{4}r^2$.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta passante per i punti A e B:

$$\frac{x+3}{4+3}=\frac{y+1}{3+1} \qquad 4x-7y+5=0$$

Determino il raggio, calcolando la distanza del punto C dalla retta:

$$r=d(C;AB)=\frac{|4-35+5|}{\sqrt{4^2+7^2}}=\frac{26}{\sqrt{65}}$$

Applicando la definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal centro:

$$(x-1)^2+(y-5)^2=\frac{26^2}{65} \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-2x-10y+\frac{78}{5}=0}$$

Verifico la relazione data:

$$\overline{AC}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{52} \qquad \overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$$

$$52+13=\frac{25}{4}\cdot\frac{26\cdot 26}{65} \qquad 65=65$$

5. Nel fascio di rette di equazione $4y-3x+k=0$, determina le rette sulle quali la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y-39=0$ stacca delle corde di misura $4\sqrt{6}$.

La retta passante per il centro e per il punto medio della corda, è perpendicolare alla corda stessa (teorema). Si viene perciò a formare un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il raggio, per cateto metà della corda e come secondo cateto la distanza del centro dalla corda. Con il teorema di Pitagora, è possibile determinare questa distanza e poi determinare il valore del parametro, ponendo la distanza del centro dal fascio uguale al valore determinato:

$$C(1;3) \qquad r=\sqrt{1+9+39}=7$$

$$d=\sqrt{7^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{49-24}=5$$

$$5=\frac{|12-3+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} \qquad |9+k|=25 \qquad 9+k=\pm 25$$

$$k_1=16:\quad \boldsymbol{4y-3x+16=0} \qquad\qquad k_2=-34:\quad \boldsymbol{4y-3x-34=0}$$

6. Sia data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x - 6$ e siano A e B le sue intersezioni con l'asse x. Determina l'equazione della circonferenza tangente in A e in B alla parabola.

Determino le intersezioni della parabola con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \qquad A(3;0) \quad B(-1;0)$$

Determino le equazioni delle tangenti alla parabola nei punti A e B (usando la regola di sdoppiamento), perché dire che una circonferenza è tangente ad una parabola equivale a dire che condividono, nei punti di tangenza, le stesse tangenti:

$$t_1: \frac{y+0}{2} = 6x - 4\frac{x+3}{2} - 6 \qquad y = 8x - 24$$

$$t_2: \frac{y+0}{2} = -2x - 4\frac{x-1}{2} - 6 \qquad y = -8x - 8$$

Determino le perpendicolari alle tangenti passanti per il punto di tangenza. Dalla loro intersezione, ottengo il centro della circonferenza:

$$\begin{cases} y - 0 = -\frac{1}{8}(x-3) \\ y - 0 = \frac{1}{8}(x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{8}(x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad C\left(1;\frac{1}{4}\right)$$

Applicando la definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal centro e usando come raggio il segmento BC:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 2^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - \frac{1}{2}y - 3 = 0}$$