1. Verifica che le due funzioni $f(x) = 3\ln x$ e $g(x) = \ln\ (2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne dai?

$$f'(x) = \frac{3}{x} \qquad g'(x) = \frac{1}{(2x)^3} \cdot 3\,(2x)^2 \cdot 2 = \frac{3}{x}$$

Le derivate delle due funzioni sono uguali, perché la funzione $g(x)$ è uguale alla funzione $f(x)$ con l'aggiunta di una costante, come si nota applicando le proprietà dei logaritmi:

$$g(x) = \ln(2x)^3 = 3\ln(2x) = 3\,(\ln 2 + \ln x) = 3\ln 2 + 3\ln x = f(x) + 3\ln 2$$

2. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arc\tan x - arc\tan\frac{x-1}{x+1}$ è costante.

Una funzione che abbia derivata nulla è una funzione costante, perciò verifico che la derivata della funzione sia nulla:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

3. La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

Determino la derivata seconda rispetto al tempo, ovvero l'accelerazione:

$$v(t) = s'(t) = 20\left(-e^{-\frac{t}{2}} + 1\right) \qquad a(t) = s''(t) = 10\,e^{-\frac{t}{2}}$$

Sostituisco il tempo $t = 4$ nell'espressione dell'accelerazione:

$$a(4) = 10\,e^{-2} m/s^2 = \boldsymbol{\frac{10}{e^2}\ m/s^2}$$

4. Date le funzioni $f(x) = ax^4 + bx$ e $g(x) = ax^2 - bx$, determina il valore dei parametri a e b in modo che sia $f'(0) = 1$ e $g'(1) = 3$.

Calcolo innanzi tutto le derivate:

$$f'(x) = 4ax^3 + b \qquad g'(x) = 2ax - b$$

$$\begin{cases} f'(0) = b \\ g'(1) = 2a - b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$$

5. Determina il valore del parametro a in modo tale che la tangente al grafico della funzione di equazione $f(x) = ax^3 + 8ax - 1$ nel punto P di ascissa uguale a $-\ 1$ sia parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Determino la derivata della funzione e la calcolo nell'ascissa di P, ponendola uguale al coefficiente angolare della bisettrice del primo e del terzo quadrante, ovvero ponendola uguale a 1:

$$f'(x) = 3ax^2 + 8a \qquad f'(-1) = 3a + 8a = 11a \qquad 11a = 1 \qquad a = \boldsymbol{\frac{1}{11}}$$

6. Data la funzione $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$, determina i coefficienti a, b, c sapendo che $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, che il grafico passa per l'origine degli assi e ha, nel punto di ascissa nulla, la retta tangente di coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty} a=a \qquad f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4)-2x(ax^2+bx+c)}{(x^2-4)^2}$$

Pongo il limite uguale a 1, impongo il passaggio della funzione per l'origine degli assi e calcolo la derivata prima in 0 ponendola uguale al coefficiente angolare dato:

$$\begin{cases} a=1 \\ \frac{c}{-4}=0 \\ \frac{-4b}{(-4)^2}=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ \frac{1}{4}b=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a=1} \\ \boldsymbol{b=2} \\ \boldsymbol{c=0} \end{cases}$$

7. Data la parabola di equazione $y=-x^2+4x-3$, trova i punti in cui la tangente è parallela alle bisettrici dei quadranti e determina le equazioni delle tangenti in tali punti.

Determino la derivata della parabola e pongo la derivata uguale ai coefficienti angoli delle bisettrici, ovvero prima uguale a 1 e poi a -1, e in questo modo determino l'ascissa del punto di tangenza. Sostituisco l'ascissa nell'equazione della parabola per determinarne l'ordinata e poi sostituisco tutto nell'equazione della retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto $y-y_P=\pm1\,(x-x_P)$:

$$f'(x)=-2x+4$$

$$-2x+4=1 \qquad x=\frac{3}{2} \qquad y=-\frac{9}{4}+6-3=\frac{3}{4} \qquad P_1\left(\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right) \qquad y-\frac{3}{4}=x-\frac{3}{2} \qquad \boldsymbol{4x-4y-3=0}$$

$$-2x+4=-1 \qquad x=\frac{5}{2} \qquad y=-\frac{25}{4}+10-3=\frac{3}{4} \qquad P_2\left(\frac{5}{2};\frac{3}{4}\right) \qquad y-\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad \boldsymbol{4x+4y-13=0}$$