Problema 1:

a. Determina l'equazione della retta t passante per i punti A e B appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$ di ascissa rispettivamente 1 e 6.

b. Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla retta t e dalla parabola.

c. Determina il punto C ottenuto dall'intersezione delle rette r e s tangenti in A e B alla parabola.

d. Calcola l'area del triangolo ABC.

a. Determino innanzi tutto le coordinate dei punti A e B, sostituendo la loro ascissa nell'equazione della parabola:

$$y_A = 1 - 5 + 6 = 2 \qquad y_B = 36 - 30 + 6 = 12 \qquad A\,(1;2) \qquad B\,(6;12)$$

Determino l'equazione della retta t:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \qquad \frac{x-1}{6-1} = \frac{y-2}{12-2} \qquad t\colon \boldsymbol{y = 2x}$$

b. Per calcolare l'area del segmento parabolico, determino t_1 ovvero la retta parallela a t e tangente alla parabola (mettendo a sistema l'equazione del fascio improprio con quella della parabola e ponendo $\Delta = 0$ nella risolvente), calcolo la distanza del punto A dalla retta tangente e calcolo la lunghezza del segmento AB. Sapendo che l'area del segmento parabolico è 2/3 dell'area del rettangolo così individuato (figura 1), procedo con il calcolo:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x + q \end{cases} \qquad x^2 - 5x + 6 = 2x + q \qquad x^2 - 7x + 6 - q = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 + 4q = 0 \qquad q = -\frac{25}{4} \qquad t_1\colon 8x - 4y - 25 = 0$$

$$d(A;\, t_1) = \frac{|8 - 8 - 25|}{\sqrt{64 + 16}} = \frac{25}{4\sqrt{5}} \qquad \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$Area = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{4\sqrt{5}} \cdot 5\sqrt{5} = \boldsymbol{\frac{125}{6}}$$

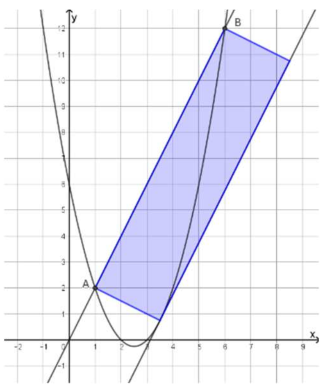


Figura 1

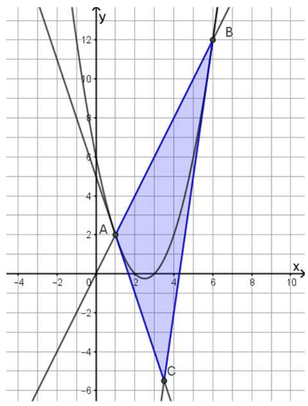


Figura 2

c. Determino le equazioni delle due tangenti alla parabola, applicando la formula di sdoppiamento: $\frac{y + y_o}{2} = a x x_o + b\frac{x + x_o}{2} + c$

$$t_A\colon \frac{y+2}{2} = x - 5\frac{x+1}{2} + 6 \qquad y + 2 = 2x - 5x - 5 + 12 \qquad y = -3x + 5$$

$$t_B\colon \frac{y+12}{2} = 6x - 5\frac{x+6}{2} + 6 \qquad y + 12 = 12x - 5x - 30 + 12 \qquad y = 7x - 30$$

Metto a sistema le equazioni delle due tangenti per ottenere le coordinate del punto C:

$$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 7x - 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 30 = -3x + 5 \\ y = -3x + 5 \end{cases} \qquad C\left(\frac{7}{2}; -\frac{11}{2}\right)$$

d. Conoscendo già la lunghezza del segmento AB e l'equazione della retta passante per i due estremi del segmento, posso calcolare la distanza di C dalla retta (determinando quindi l'altezza del triangolo) e calcolare così l'area del triangolo:

$$h = d(C; AB) = \frac{\left|7 + \frac{11}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{25}{2\sqrt{5}} \qquad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2\sqrt{5}} \cdot 5\sqrt{5} = \boldsymbol{\frac{125}{4}}$$

Problema 2:

Sia data la generica parabola $y = kx^2 + 2x - k + 1$.

a. Determina l'equazione della parabola γ_1, che ha il vertice di ordinata 3.

b. Determina l'equazione della parabola γ_2, tangente alla retta di equazione $y = 2x - 2$.

c. Dopo aver determinato A e B, punti di intersezione di γ_1 e γ_2, determina l'equazione di una retta parallela all'asse y (passante per secondo e terzo quadrante) che, nella parte di piano racchiusa dalle due parabole, intercetta una corda PQ, di lunghezza 3.

d. Tracciate le tangenti alle due parabole nei punti P e Q, che si intersecano nel punto T, trova l'area del triangolo PQT.

a. Il vertice di una parabola ha generica ordinata: $-\frac{\Delta}{4a}$, perciò:

$$\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 3 \qquad \frac{-4 + 4k(-k+1)}{4k} = 3 \qquad -1 - k^2 + k = 3k \qquad k^2 + 2k + 1 = 0 \qquad k = -1$$

$$\boldsymbol{\gamma_1:\ y = -x^2 + 2x + 2}$$

b. Metto a sistema l'equazione della parabola e quella della tangente e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} y = kx^2 + 2x - k + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \qquad kx^2 - k + 3 = 0 \qquad \Delta = -4k(-k+3) = 0 \qquad \begin{cases} k_1 = [0] \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\gamma_2:\ y = 3x^2 + 2x - 2}$$

c. Determino le coordinate dei punti di intersezione tra le due parabole A e B, mettendo a sistema le due equazioni appena determinate:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 2 \\ y = 3x^2 + 2x - 2 \end{cases} \qquad 4x^2 - 4 = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 1 \qquad \boldsymbol{A\ (-1;\ -1)} \qquad \boldsymbol{B\ (1; 3)}$$

Considero la retta $x = k$, con $k < 0$, metto a sistema la sua equazione prima con la parabola γ_1 (e determino così le coordinate di P) e poi con la parabola γ_2 (determinando così le coordinate di Q). Siccome le coordinate sono espresse in funzione del parametro, pongo la distanza tra i due punti uguale a 3:

$$\begin{cases} x = k \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{cases} \qquad P\ (k;\ -k^2 + 2k + 2) \qquad \begin{cases} x = k \\ y = 3x^2 + 2x - 2 \end{cases} \qquad Q\ (k;\ 3k^2 + 2k - 2)$$

L'ordinata di P è maggiore di quella di Q, perciò:

$$-k^2 + 2k + 2 - 3k^2 - 2k + 2 = 3 \qquad -4k^2 = -1 \qquad k_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

Visto che $k < 0$, otteniamo: $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$, $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e $Q\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

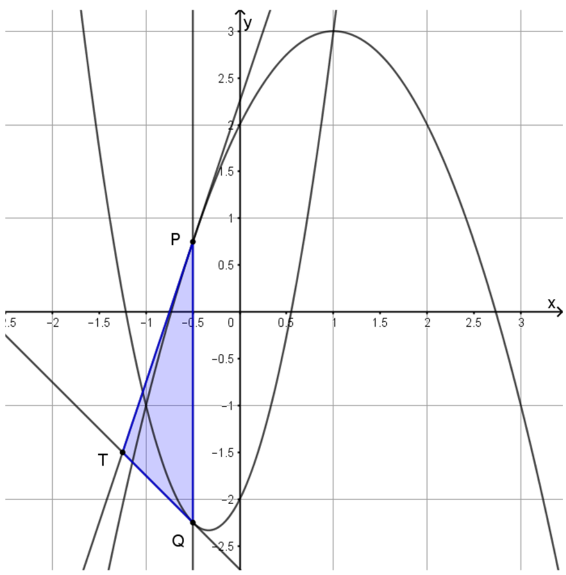
d. Determino le equazioni delle due tangenti alla parabola, applicando la formula di sdoppiamento: $\frac{y+y_o}{2} = axx_o + b\frac{x+x_o}{2} + c$:

$$t_P: \frac{y + \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{2}x + 2\frac{x - \frac{1}{2}}{2} + 2 \qquad y = 3x + \frac{9}{4}$$

$$t_Q: \frac{y - \frac{9}{4}}{2} = -\frac{3}{2}x + 2\frac{x - \frac{1}{2}}{2} - 2 \qquad y = -x - \frac{11}{4}$$

Metto a sistema le equazioni delle due tangenti per ottenere le coordinate del punto T:

$$\begin{cases} y = 3x + \frac{9}{4} \\ y = -x - \frac{11}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + \frac{9}{4} = -x - \frac{11}{4} \\ y = -x - \frac{11}{4} \end{cases} \qquad T\left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}\right)$$



Per determinare l'area del triangolo QPT, conoscendo la lunghezza del segmento PQ, manca solo la distanza di T dalla retta PQ:

$$h = \left|-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4} \qquad A_{QPT} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

1. Trova l'equazione della tangente comune alle due parabole di equazione: $y = -x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x + 3$.

Considero la retta generica di equazione $y = mx + q$. Metto a sistema l'equazione della generica retta prima con l'equazione di una parabola e poi con l'equazione dell'altra e poi pongo $\Delta = 0$ nella risolvente.

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -x^2 - 2x \end{cases} \qquad x^2 + x(m+2) + q = 0 \qquad \Delta = (m+2)^2 - 4q = 0$$

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \qquad x^2 + x(m-2) + q - 3 = 0 \qquad \Delta = (m-2)^2 - 4q + 12 = 0$$

Metto a sistema le due equazioni così ottenute per ricavare il valore dei due parametri:

$$\begin{cases} (m+2)^2 = 4q \\ (m-2)^2 + 12 = 4q \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+2)^2 = (m-2)^2 + 12 \\ (m+2)^2 = 4q \end{cases} \qquad \begin{cases} 4m = -4m + 12 \\ (m+2)^2 = 4q \end{cases} \qquad \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ q = \dfrac{49}{16} \end{cases}$$

L'equazione della tangente comune è: $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x + \frac{49}{16}}$

2. Scrivi l'equazione della parabola che passa per il punto $A(1; -2)$ e ha l'asse di equazione $x = 2$ e il vertice appartenente alla retta di equazione $x + 2y + 4 = 0$.

Siccome l'asse ha equazione $x = 2$, il vertice, appartenendo alla retta $x + 2y + 4 = 0$, ha coordinate $V\ (2;\ -3)$ (avendo sostituito il valore dell'ascissa del vertice nell'equazione della retta), perciò pongo l'ascissa generica del vertice uguale a 2 e impongo il passaggio per i punti V e A, sostituendo le loro coordinate nell'equazione generica della parabola $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -3 = 4a + 2b + c \\ -2 = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4a \\ -4a + c = -3 \\ -3a + c = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a - 3 \\ a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = x^2 - 4x + 1}$$

3. Trova per quali valori di k il punto $P(k - 5; 1 - 2k)$ appartiene all'asse del segmento di estremi $A(-2; 4)$ e $B(1; -2)$.

Appartenendo all'asse del segmento, P è equidistante da A e da B, cioè: $\overline{PA} = \overline{PB} \quad \Rightarrow \quad \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$

$$(k - 5 + 2)^2 + (1 - 2k - 4)^2 = (k - 5 - 1)^2 + (1 - 2k + 2)^2$$

$$(k-3)^2 + (-3 - 2k)^2 = (k-6)^2 + (3 - 2k)^2$$

$$k^2 - 6k + 9 + 9 + 12k + 4k^2 = k^2 - 12k + 36 + 9 - 12k + 4k^2$$

$$30k = 27 \qquad \boldsymbol{k = \frac{9}{10}}$$

4. Dato il triangolo di vertici $A(-1; -4)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 4)$, scrivi le equazioni delle mediane e verifica che passano tutte per lo stesso punto.

Determino il punto medio M_1 del lato BC e l'equazione di AM_1:

$$M_1\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = (1; 3) \qquad r(A; M_1): \frac{x - x_A}{x_{M_1} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{M_1} - y_A} \qquad \frac{x+1}{1+1} = \frac{y+4}{3+4} \qquad y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$$

Determino il punto medio M_2 del lato AC e l'equazione di BM_2:

$$M_2\ (-1; 0) \qquad r(B; M_2): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y}{2} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Determino il punto medio M_3 del lato AB e l'equazione di CM_3:

$$M_3\ (1; -1) \qquad r(C; M_3): \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-4}{-1-4} \qquad y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

Determino l'intersezione tra le mediane relative al lato BC e al lato AC e verifico che il punto così calcolato appartiene alla mediana del lato AB, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della mediana:

$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \qquad G \in r(C; M_3), infatti: \frac{2}{3} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$$

5. Determina per quale valore di c le parabole di equazioni $y = x^2 - 2x + c + \frac{3}{2}$ e $y = -x^2 + 4cx$ sono tangenti e determina le coordinate del punto di tangenza nel caso $c > 0$.

Metto a sistema le equazioni delle due parabole e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + c + \dfrac{3}{2} \\ y = -x^2 + 4cx \end{cases} \qquad 2x^2 - 2x\,(1 + 2c) + c + \frac{3}{2} = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = (1 + 2c)^2 - 2c - 3 = 0$$

$$4c^2 + 2c - 2 = 0 \qquad 2c^2 + c - 1 = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} c_1 = [-1] \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Sostituendo il valore trovato nella risolvente, trovo l'ascissa del punto di tangenza. Sostituendo poi l'ascissa in una delle due equazioni, trovo le coordinate del punto di tangenza:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad (x - 1)^2 = 0 \qquad \boldsymbol{T\,(1; 1)}$$

6. Determina a e b in modo che la parabola di equazione $y = ax^2 + bx - 1$ sia tangente all'asse x e abbia, nel punto di ascissa 4, la tangente di coefficiente angolare – 1.

Perché la parabola sia tangente all'asse x, la sua equazione deve avere $\Delta = 0$: $b^2 + 4a = 0$.
Il punto di ascissa 4 ha coordinate $(4; 16a + 4b - 1)$, ottenendo l'ordinata dalla sostituzione dell'ascissa nell'equazione della parabola. Applico la formula di sdoppiamento $\left(\frac{y+y_o}{2} = axx_o + b\frac{x+x_o}{2} + c\right)$ alla parabola e pongo il coefficiente angolare della retta uguale a – 1:

$$\frac{y + 16a + 4b - 1}{2} = 4ax + b\frac{x + 4}{2} - 1 \qquad m = 8a + b = -1$$

Ecco le due equazioni da mettere a sistema:

$$\begin{cases} b^2 + 4a = 0 \\ 8a + b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a = -b^2 \\ 2b^2 - b - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = -\dfrac{1}{4}} \\ \boldsymbol{b_1 = 1} \end{cases} \vee \begin{cases} \boldsymbol{a_2 = -\dfrac{1}{16}} \\ \boldsymbol{b_2 = -\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

7. Scrivi l'equazione della retta che interseca la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ nei due punti A e B di ascissa 0 e 4. Calcola la lunghezza della corda AB e l'area del triangolo ABO, essendo O l'origine degli assi.

Sostituisco le due ascisse nell'equazione della parabola per ottenere le coordinate di A e B: $A(0; -1)$ e $B(4; 3)$.
Determino la lunghezza della corda AB: $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.
Calcolo l'area del triangolo ABO:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} \cdot d(B; asse\ y) = \frac{1}{2} \cdot |y_A| \cdot |x_B| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = \boldsymbol{2}$$

8. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 8$, trova quale punto della parabola ha distanza minima dalla retta $y = -2x - 1$.

Per trovare il punto della parabola che ha distanza minima dalla retta, determino la tangente alla parabola parallela alla retta data e trovo il punto di intersezione tra la tangente e la parabola: quel punto sarà quello di distanza minima. Per determinare la tangente, metto a sistema l'equazione della parabola con l'equazione del fascio improprio cui appartiene la retta data e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = -2x + q \end{cases} \qquad x^2 - 4x + 8 - q = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 8 + q = 0 \qquad q = 4$$

Sostituendo $q = 4$ ottengo l'ascissa del punto di intersezione:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad x = 2 \qquad \boldsymbol{T\,(2; 0)}$$