1. $\sqrt{1+3\sin x} > 1-\sin x$

$$\begin{cases} 1-\sin x \geq 0 \\ 1+3\sin x > 1-2\sin x+\sin^2 x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1+3\sin x \geq 0 \\ 1-\sin x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ 5\sin x - \sin^2 x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1+3\sin x \geq 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\sin x\ (5-\sin x) > 0 \quad \vee \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x\ (5-\sin x) > 0 \qquad siccome\ 5-\sin x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x > 0$$

$$\boldsymbol{2k\pi < x < \pi + 2k\pi}$$

2. $\frac{\sin 2x + 2\sin x}{\sqrt{\tan x - 1}} \leq 0$

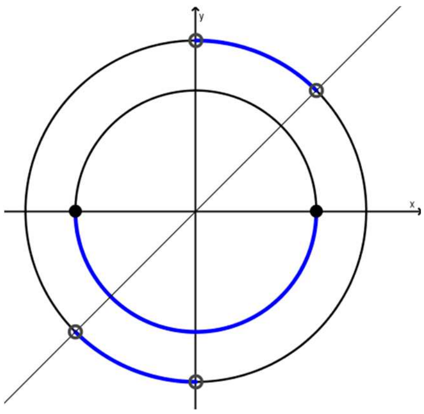
Siccome il denominatore è una radice di indice pari, è sempre positivo, perciò il numeratore – perché la frazione sia negativa – deve essere negativo. Imporremo poi le condizioni di esistenza per il denominatore:

$$N \leq 0: \quad 2\sin x\cos x + 2\sin x \leq 0 \qquad 2\sin x\ (\cos x + 1) \leq 0$$

$$siccome\ \cos x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x \leq 0$$

$$\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \tan x > 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$$

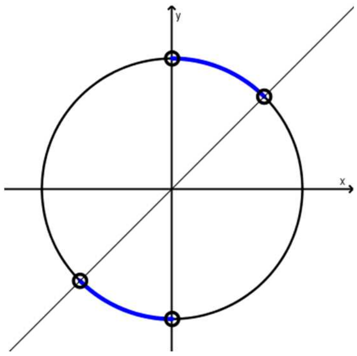


3. $\left|\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} < \cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \qquad 0 < \cot\frac{x}{2} < 1$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi}$$



4. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin^2 x - (1+\sqrt{2})\sin x + 1 \geq 0 \\ \cos 2x - \sin 2x > 1 \end{cases}$

$$\sqrt{2}\sin^2 x - (1+\sqrt{2})\sin x + 1 \geq 0$$

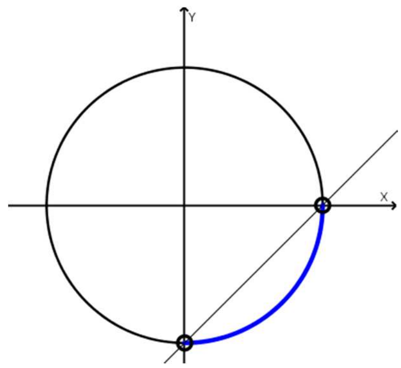
$$\sin x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{1+2+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2} \pm (\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \Big\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \sin x \geq 1$$

Ovvero: $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1$

$$\cos 2x - \sin 2x > 1$$

Si tratta di una disequazione lineare, perciò pongo: $\cos 2x = X$ e $\sin 2x = Y$:

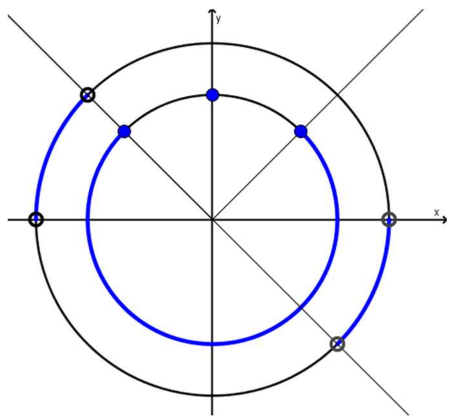


$$\begin{cases} X - Y > 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = X - 1 \\ X^2 + X^2 - 2X + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X\,(X-1) = 0 \\ Y = X - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi$$

$$\frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi$$



$$\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1 \\ \frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \pi + k\pi}$$

5. Determina graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x \sin x = 1 - \dfrac{k}{2} \\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{1+\cos 2x}{2} - \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1 - \dfrac{k}{2} \\ 0 < 2x \leq \dfrac{2}{3}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + 2\cos 2x - 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 - k \\ 0 < 2x \leq \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X + \sqrt{3}Y + k - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 < 2x \leq \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Il fascio di rette è improprio.

Impongo il passaggio per il punto $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

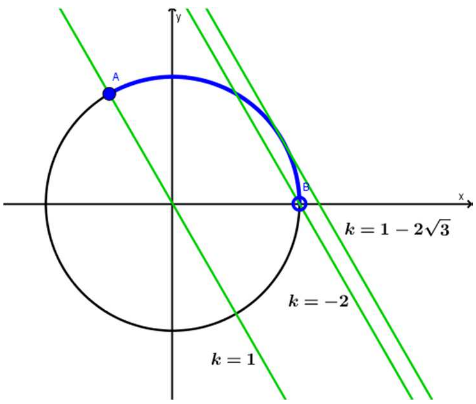
$$3\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + k - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{k = 1} \qquad \boldsymbol{1\ soluzione}$$

Impongo il passaggio per il punto $B\ (1{,}0)$:

$$3 + k - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{k = -2} \qquad \boldsymbol{1\ soluzione}$$

Determino il valore del parametro per la tangente, imponendo la distanza della generica retta del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio, 1:

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{9+3}} = 1 \qquad k - 1 = \pm 2\sqrt{3} \qquad k = 1 \pm 2\sqrt{3}$$



Il valore della tangente cercato è: $\boldsymbol{k = 1 - 2\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{2\ soluzioni}$

$$\boldsymbol{una\ soluzione:\ -2 \leq k \leq 1} \qquad \boldsymbol{due\ soluzioni:\ 1 - 2\sqrt{3} \leq k < -2}$$