1. Un avvolgimento chiuso su se stesso circonda un solenoide lungo e sottile come mostrato in figura. Il solenoide è lungo 60 cm e ha una sezione di $5{,}0\ cm^2$ con 800 spire, mentre l'avvolgimento ha 30 spire con sezione $120\ cm^2$. Le spire di entrambi sono avvolte nel medesimo senso e l'asse del solenoide coincide con l'asse dell'avvolgimento.

$$l = 60\ cm \qquad S = 5{,}0\ cm^2 \qquad N = 800 \qquad N_a = 30 \qquad A = 120\ cm^2$$

A. Nel solenoide scorre una corrente di $0{,}80\ A$. Calcola l'intensità del campo magnetico nel solenoide e descrivi la sua configurazione spaziale.

Nel caso in cui il diametro di un solenoide sia molto minore della sua lunghezza, allora esso può essere approssimato a un solenoide infinito. In questa situazione, il diametro è dato da $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 0{,}025\ m \ll l$. Il campo magnetico può quindi essere calcolato come se fosse il caso di un solenoide infinito:

$$B = \mu_o \frac{NI}{l} = \mathbf{1{,}3 \cdot 10^{-3}\ T}$$

Il campo magnetico esiste solo all'interno del solenoide, mentre all'esterno è nullo. Esso inoltre ha la direzione dell'asse del solenoide.

B. Calcola il flusso attraverso l'avvolgimento.

Il flusso del campo magnetico attraverso l'avvolgimento è dato dal prodotto tra il numero di spire dell'avvolgimento per la superficie per il campo magnetico appena determinato, mentre il coseno dell'angolo è pari a uno, dato che il solenoide è perpendicolare al piano dell'avvolgimento. La superficie da considerare è quella del solenoide, ovvero l'unica attraverso la quale c'è un campo magnetico, visto che all'esterno del solenoide il campo magnetico è nullo:

$$\Phi(\vec{B}) = BSN_a = 30 \cdot 5{,}0\ cm^2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ T = \mathbf{20\ \mu Wb}$$

C. Che cosa accade se si aumenta linearmente la corrente dal valore iniziale a $5{,}0\ A$ in $0{,}05\ s$?

L'aumento della corrente determina una variazione del campo magnetico e, quindi, una variazione del flusso del campo magnetico attraverso l'avvolgimento e questo, per l'induzione elettromagnetica, determina una **forza elettromotrice indotta**.

D. Calcola la forza elettromotrice indotta nell'avvolgimento.

Per determinare la forza elettromotrice indotta nell'avvolgimento, applichiamo l'espressione dell'induzione elettromagnetica, determinando la variazione del flusso attraverso la superficie del solenoide e il numero di avvolgimenti e considerando che il campo magnetico è perpendicolare alla superficie, perciò il coseno dell'angolo è pari a uno:

$$fem = \frac{\Delta\Phi\ (\mathrm{B})}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot N_a S \cdot \cos\alpha = N_a S\ \mu_o \frac{N}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = \mathbf{2{,}1\ mV}$$

E. Calcola l'induttanza del solenoide, senza considerare gli effetti di mutua induzione.

L'induttanza di un solenoide è data da:

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S = \mathbf{0{,}67\ mH}$$

F. Che cosa accade se si scambiano i ruoli tra avvolgimento e solenoide e si fa variare dall'esterno la corrente nell'avvolgimento, chiudendo su se stesso il solenoide?

Se si fa variare la corrente che scorre nell'avvolgimento e si chiude su se stesso il solenoide si avrà una forza elettromotrice indotta nel solenoide dovuta alla variazione di corrente nell'avvolgimento. La forza elettromotrice si calcola facendo il prodotto tra il coefficiente di mutua induttanza e la variazione nel tempo della corrente e tale coefficiente è una proprietà del sistema costituito da avvolgimento e solenoide, indipendentemente dal fatto che il solenoide sia chiuso su se stesso.

2. Un tuo compagno di classe chiede se, secondo te, è possibile fare in modo di eliminare il campo magnetico terrestre in una piccola zona di spazio, per esempio all'interno di un solenoide. Per fare questo esperimento hai a disposizione, oltre a carta e penna, uno stretto cilindro di plastica trasparente, lungo $40\ cm$, del filo di rame con una resistenza elettrica trascurabile, una batteria da $12\ V$, una piccola bussola e un resistore da $100\ \Omega$. Su Internet hai trovato che, nella zona in cui abiti, il campo magnetico terrestre ha una componente orizzontale di $23\ \mu T$ e una componente verticale, rivolta verso il basso, di $42\ \mu T$.

A. Come puoi fare a disporre il solenoide con l'asse di simmetria parallelo al campo magnetico terrestre?

Con la bussola controllo la direzione Sud-Nord del punto in cui mi trovo. Il solenoide al suo interno determina un campo magnetico parallelo al suo asse, perciò devo inclinarlo in modo che abbia una componente orizzontale pari a quella del campo magnetico terrestre e una verticale pari a quella data. Per determinare l'angolo di inclinazione:

$$\alpha = arc\tan\frac{B_\perp}{B_\parallel} = arc\tan\frac{42\ \mu T}{23\ \mu T} = \mathbf{61°}$$

B. Calcola il modulo del campo magnetico terrestre nella zona in cui ti trovi e il valore dell'intensità di corrente che hai a disposizione per il tuo esperimento.

Per determinare il modulo del campo magnetico, conoscendo le sue componenti:

$$B = \sqrt{B_\parallel^2 + B_\perp^2} = \mathbf{48\ \mu T}$$

Dai dati forniti, per l'esperimento, dalla legge di Ohm, ho a disposizione una corrente:

$$V = IR \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{V}{R} = \frac{12\ V}{100\ \Omega} = \mathbf{0,12\ A}$$

C. Determina il numero di avvolgimenti che il solenoide deve avere per fare in modo che il suo campo magnetico compensi quello terrestre. Se guardi il cilindro lungo il suo asse di simmetria, dalla parte dell'estremità che si trova a Sud, per ottenere tale effetto la corrente deve scorrere in senso orario o in senso antiorario?

Il campo magnetico di un solenoide si determina con la formula del solenoide e poi si pone uguale a quello terrestre B:

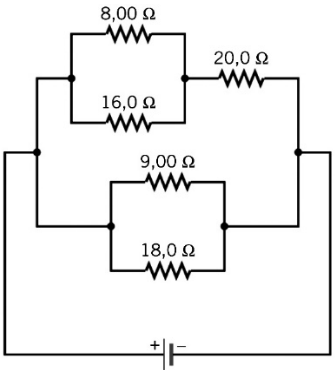
$$B = \mu_o\frac{NI}{L} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{BL}{\mu_o I} = \mathbf{1,3 \cdot 10^2}$$

Il solenoide contiene circa 130 avvolgimenti e il verso del campo magnetico del solenoide deve essere opposto a quello del campo magnetico terrestre, ovvero diretto da Nord a Sud e, in questo modo, il verso della corrente deve essere **antiorario**.

D. Il cilindro che sostiene il solenoide è trasparente, in modo da poter osservare ciò che avviene al suo interno. Quali esperimenti puoi fare con un ago di bussola in modo da verificare se sei riuscito a ottenere una zona di spazio con campo magnetico totale nullo?

Se si mette la bussola all'interno del solenoide, questa non dovrebbe ruotare, ovvero non dovrebbe rilevare nessun campo magnetico.

3. La corrente nel resistore da $8{,}00\ \Omega$ mostrato in figura 1 è $0{,}500\ A$. Trova la corrente nel resistore da $20{,}00\ \Omega$ e in quello da $9{,}00\ \Omega$.



Determino innanzi tutto la corrente nel resistore da 16,0 Ω, sapendo che il resistore da 8,00 Ω e quello da 16,0 Ω si trovano sottoposti alla stessa differenza di potenziale, visto che sono collegati in parallelo, applicando la legge di Ohm, $V = IR$:

$$\Delta V_8 = \Delta V_{16} \qquad \Rightarrow \qquad I_8 R_8 = I_{16} R_{16} \qquad \Rightarrow \qquad I_{16} = I_8 \frac{R_8}{R_{16}} = 0{,}250\ A$$

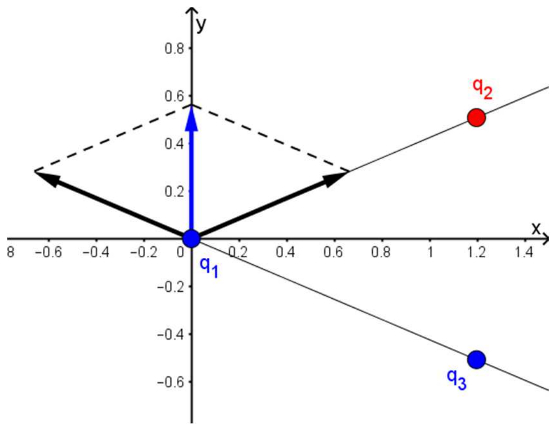
La somma delle due correnti che circolano nelle due resistenze collegate in parallelo è la stessa che circola nella resistenza di 20,0 Ω, infatti due resistenze collegate in serie sono attraversate dalla stessa corrente:

$$I_{20} = I_8 + I_{16} = \mathbf{0{,}750\ A}$$

Le due resistenze di 9,00 Ω e 18,0 Ω sono collegate in parallelo tra di loro e la resistenza ad esse equivalente è collegata in parallelo con le tre resistenze precedenti. Determino quindi la differenza di potenziale delle tre precedenti, che è data dalla somma della differenza di potenziale della resistenza di 8,00 Ω e di quella di 20,0 Ω e questa differenza di potenziale è uguale al potenziale della resistenza di 9,00 Ω, collegata in parallelo a quella di 18,0 Ω:

$$I_8 R_8 + I_{20} R_{20} = I_9 R_9 \qquad \Rightarrow \qquad I_9 = \frac{I_8 R_8 + I_{20} R_{20}}{R_9} = \mathbf{2{,}11\ A}$$

4. La figura 2 mostra tre cariche puntiformi fisse sul piano. La carica all'origine degli assi è $q_1 = +8{,}00\ \mu C$; le altre due cariche hanno la stessa grandezza ma segno opposto: $q_2 = -5{,}00\ \mu C$ e $q_3 = +5{,}00\ \mu C$.
   A. Calcola la forza totale (intensità, direzione e verso) esercitata su q_1 dalle altre due cariche.
   B. Se q_1 avesse una massa di $1{,}5\ g$ e fosse libera di muoversi, quale sarebbe la sua accelerazione iniziale?



A. La forza totale agente sulla carica q_1 è indicata in blu nel disegno a fianco: considerando la forza agente per effetto della carica q_2 di tipo attrattivo, visto che le cariche sono opposte, e quella per effetto della carica q_3 repulsiva, visto che le due cariche hanno segno opposto, ciò che ne esce, visto che i moduli delle due forze sono uguali, è una forza che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse y. Determiniamola algebricamente e applicando la legge di Coulomb.
I moduli delle due forze sono dati da:

$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad\qquad F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r^2}$$

E, dato che i moduli delle due cariche q_2 e q_3 sono uguali, sono uguali anche i moduli delle due forze:

$$F_{12} = F_{13} = F$$

Determiniamo le componenti delle due forze:

$$F_{12_x} = F\cos 23{,}0° \qquad F_{12_y} = F\sin 23{,}0° \qquad\qquad F_{13_x} = -F\cos 23{,}0° \qquad F_{13_y} = F\sin 23{,}0°$$

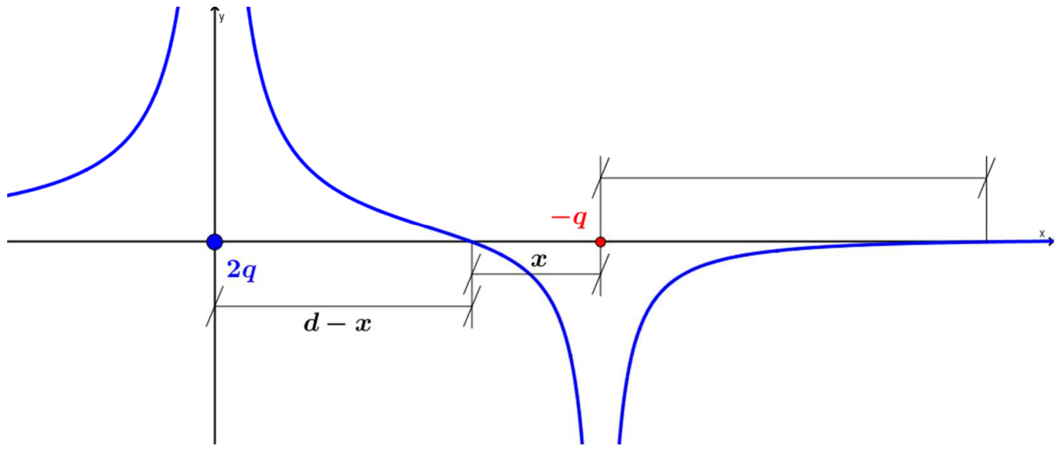
Sommando le singole componenti: $F_{1_x} = F_{12_x} + F_{13_x} = 0$ $\quad F_{1_y} = F_{12_y} + F_{13_y} = 2\,F\sin 23{,}0°$, resta solo la componente positiva dell'asse y, come già esplicitato precedentemente. Si può infine concludere che il modulo della forza agente sulla carica q_1 è dato da:

$$F_1 = 2\,k\frac{q_1 q_3}{r^2}\sin 23{,}0° = \mathbf{0{,}166\ N}$$

B. Applicando la seconda legge della dinamica, otteniamo l'accelerazione iniziale, che ha la stessa direzione e lo stesso verso della forza applicata:

$$F_1 = ma \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F_1}{m} = \mathbf{111\ m/s^2}$$

5. Due cariche sono poste a una distanza d. Una carica è positiva e ha intensità doppia rispetto a quella dell'altra carica, che è negativa. La carica positiva è alla sinistra della carica negativa. Calcola a quale distanza dalla carica negativa sono i due punti in cui il potenziale elettrico totale è nullo.



Consideriamo innanzi tutto un punto tra le cariche, posto a una distanza x dalla carica negativa e, di conseguenza, a una distanza $d-x$ dalla carica positiva. Pongo il potenziale in questo punto uguale a zero:

$$k\frac{2q}{d-x}-k\frac{q}{x}=0 \qquad 2x=d-x \qquad x=\frac{d}{3}$$

Il punto tra le cariche è a una distanza $\frac{d}{3}$ dalla carica negativa.
Considero ora un punto che si trovi all'esterno del sistema costituito dalle due cariche. Supponiamo che si trovi a sinistra della carica positiva. In tal caso, la distanza dalla carica positiva sarà pari a x e quello dalla carica negativa sarà pari a $d+x$:

$$k\frac{2q}{x}-k\frac{q}{d+x}=0 \qquad 2d+2x=x \qquad x=-2d$$

Questo significa che l'ulteriore punto in cui il potenziale è nullo è a destra della carica negativa, a una distanza da essa pari a d.

6. Le onde elettromagnetiche inviate da una chiamata con un telefono cellulare verso un'automobile hanno un campo magnetico efficace di $1{,}5\cdot 10^{-10}\,T$. Le onde attraversano perpendicolarmente un finestrino aperto di area $0{,}20\,m^2$. Quanta energia attraversa il finestrino in una chiamata di $45\,s$?

$$B_o=1{,}5\cdot 10^{-10}\,T \qquad A=0{,}20\,m^2 \qquad \Delta t=45\,s \qquad E?$$

La densità di energia di un'onda elettromagnetica è data da:

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2+\frac{1}{2\mu_o}B^2=\frac{1}{2}\varepsilon_o c^2B^2+\frac{1}{2\mu_o}B^2=\frac{1}{2\mu_o}B^2+\frac{1}{2\mu_o}B^2=\frac{B^2}{\mu_o}$$

L'irradiamento di un'onda elettromagnetica nel vuoto è dato dal prodotto tra la densità di energia e la velocità della luce, ma anche dal rapporto tra l'energia e l'area (in questo caso quella del finestrino) e l'intervallo di tempo:

$$E_R=uc=\frac{E}{A\,\Delta t} \quad\Rightarrow\quad E=uc\,A\,\Delta t=\frac{B^2}{\mu_o}c\,A\,\Delta t=\mathbf{4{,}8\cdot 10^{-5}\,J}$$

7. Le particelle 1 e 2 hanno la stessa carica q ma masse differenti: $m_1 = 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ kg$ e $m_2 = 3{,}9 \cdot 10^{-8}\ kg$. Le due particelle partono da ferme e accelerano tramite la stessa differenza di potenziale V, entrando nello stesso campo magnetico B. Le particelle viaggiano perpendicolarmente al campo magnetico su percorsi circolari. Il raggio del percorso della particella 1 è $r_1 = 15\ cm$. Qual è il raggio (in centimetri) del percorso della particella 2?

$q_1 = q_2$ $\quad m_1 = 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ kg$ $\quad m_2 = 3{,}9 \cdot 10^{-8}\ kg$ $\quad V_1 = V_2$ $\quad B_1 = B_2$ $\quad r_1 = 15\ cm$ $\quad r_2?$

Consideriamo la singola particella q_1: entrando nel campo magnetico, essa è sottoposta ad una forza di Lorentz, per effetto del campo magnetico, che agisce come forza centripeta, determinando la traiettoria circolare. Poniamo quindi uguale la forza di Lorentz all'espressione generica della forza centripeta:

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{m_1 v_1}{qB_1}$$

Determino innanzi tutto la velocità della particella, ponendo uguali l'energia potenziale iniziale (la particella parte da ferma) e l'energia cinetica finale (immaginando abbia esaurito tutta l'energia potenziale):

$$U_o = K \quad \Rightarrow \quad Vq = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qV_1}{m_1}}$$

Posso quindi esprimere il potenziale in funzione del raggio:

$$V_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2q} = \frac{v_1}{2}B_1 \cdot \frac{m_1 v_1}{qB_1} = \frac{1}{2}B_1 v_1 r_1 = V_2$$

A questo punto è possibile determinare il raggio della seconda particella, sostituendo le relazioni fin qui ottenute:

$$r_2 = \frac{m_2 v_2}{qB_2} = m_2\sqrt{\frac{2qV_2}{m_2}} \cdot \frac{1}{qB_2} = m_2\sqrt{\frac{2qV_1}{m_2}} \cdot \frac{1}{qB_1} = m_2\sqrt{\frac{2q \cdot \frac{1}{2}B_1 v_1 r_1}{m_2}} \cdot \frac{1}{qB_1} = \sqrt{\frac{m_2 v_1 r_1}{qB_1}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1 v_1}{qB_1} \cdot r_1} = r_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \mathbf{20\ cm}$$

8. Una spira quadrata di lato 5 cm è immersa in un campo magnetico perpendicolare alla spira. L'intensità del campo magnetico varia in funzione del tempo, secondo la legge $B(t) = (3t^2 - 2t)\ \mu T$. Calcola il valore assoluto della circuitazione del campo elettrico indotto lungo il perimetro della spira al tempo $t = 2\ s$.

La circuitazione è data, secondo una delle equazioni di Maxwell, dalla forza elettromotrice, ovvero:

$$\Gamma(E) = \left|-\frac{d\Phi\ (\mathrm{B})}{dt}\right| = \left|-\frac{dB(t)}{dt}\right| \cdot A\cos\alpha = |-(6t-2)|\ l^2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma\big(E(2s)\big) = \mathbf{25\ nV}$$