Risolvi:

1. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\,sen\,2x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\,sen\,x\cos x + \cos^2 x + sen^2 x = 0$$
$$sen^2 x + 2\sqrt{3}\,sen\,x\cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Si tratta di un'equazione omogenea di secondo grado. Divido entrambi i membri per $\cos^2 x$, avendo verificato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione data:

$$tg^2 x + 2\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0$$
$$\left(tg\,x + \sqrt{3}\right)^2 = 0$$
$$tg\,x = -\sqrt{3} \qquad \boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi}$$

2. $2\sqrt{2}\,senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}\,sen\,x - 1 = 0$

$$\sqrt{2}\,sen\,x\,(2\cos x - 1) + 2\cos x - 1 = 0$$
$$(2\cos x - 1)\left(\sqrt{2}\,sen\,x + 1\right) = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$
$$\mathrm{sen}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \boldsymbol{x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi} \qquad \boldsymbol{x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi}$$

3. $\dfrac{\cos x}{1 + sen\,x} + tg\,x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$\frac{\cos x}{1 + sen\,x} + \frac{sen\,x - 1}{\cos x} = 0$$
$$\frac{\cos^2 x + sen^2 x - 1}{\cos x\;(1 + sen\,x)} = 0$$
$$0 = 0 \qquad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + sen\,x \neq 0 \end{cases} \qquad \cos x \neq 0 \qquad \boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

4. $\sqrt{\sqrt{3} - 2\cos x} \leq 0$

Una radice quadrata è sempre positiva, perciò l'unica soluzione sarà quella ottenuta dall'argomento nullo:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

5. $\dfrac{sen\,x + \dfrac{1}{ctg\,x}}{ctg\,x} \geq -1$

$$\frac{\dfrac{\cos x + 1}{ctg\,x}}{ctg\,x} \geq -1$$

$$\frac{\cos x + 1}{ctg^2 x} + 1 \geq 0$$

Il numeratore della frazione è sicuramente non negativo, visto che $-1 \leq \cos x \leq 1$, perciò la prima frazione può assumere 0 come valore minimo e, sommata a 1, assumerà sicuramente valore positivo, come richiesto. In altre parole, la disequazione è verificata per ogni valore di x appartenente al dominio:

$$\begin{cases} ctg\,x \neq 0 \\ x \neq k\pi \end{cases} \qquad \boldsymbol{x \neq k\frac{\pi}{2}}$$

6. $\sqrt{3}\,sen^2 x - 3\,sen\,2x > \sqrt{3}\,(1 - 3\cos^2 x)$

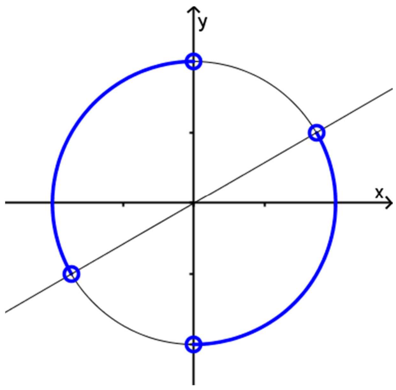
$$\sqrt{3}\,sen^2 x - 6\,sen\,x\cos x > \sqrt{3}\,(\cos^2 x + sen^2 x - 3\cos^2 x)$$

$$\sqrt{3}\,sen^2 x - 6\,sen\,x\cos x > -2\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}\,sen^2 x$$

$$2\cos^2 x\,\left(\sqrt{3} - 3\,tg\,x\right) > 0$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tg\,x < \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

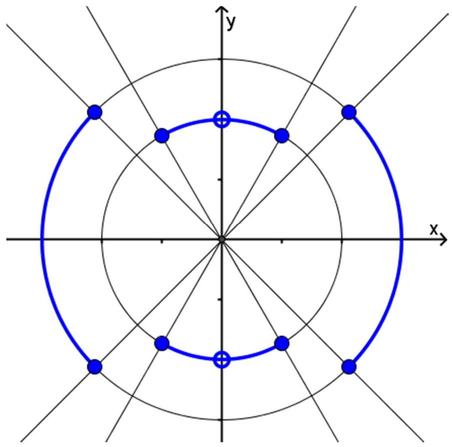
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + k\pi}$$



7. $\begin{cases} tg^2 x - 3 \geq 0 \\ 2\cos^2 x - 1 \geq 0 \end{cases}$

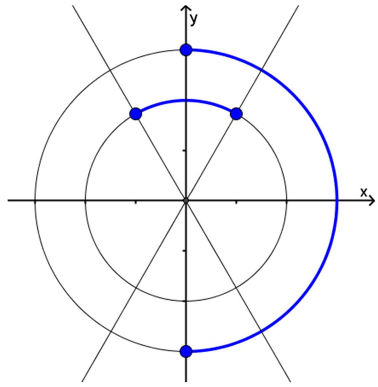
$$\begin{cases} tg\,x \leq -\sqrt{3} \quad \vee \quad tg\,x \geq \sqrt{3} \\ \cos x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

impossibile



8. Determina il dominio della funzione: $f(x) = \sqrt{2sen\, x - \sqrt{3}} + \sqrt{\cos x}$

$$\begin{cases} 2\; sen\; x - \sqrt{3} \geq 0 \\ cos\; x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\; x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos\; x \geq 0 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

9. Discuti, individuando graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} k\; sen\; x - 1 + \cos x = 2k \\ \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

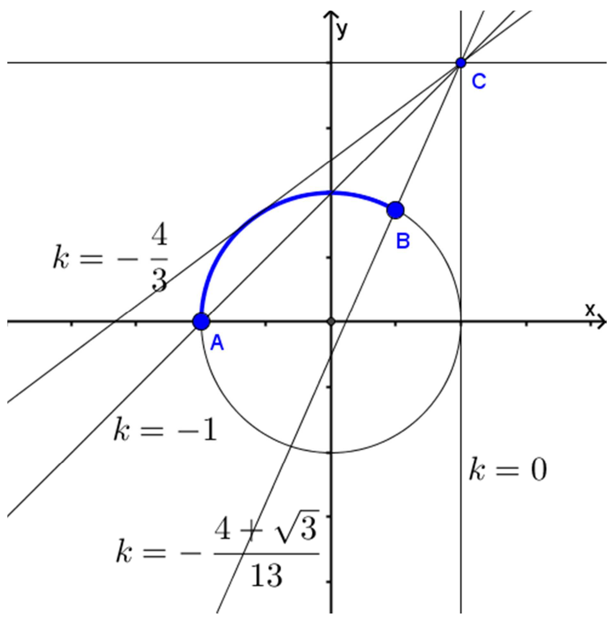
$$\begin{cases} kY - 1 + X = 2k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \leq X \leq \frac{1}{2};\, 0 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

La prima equazione è rappresentata da un fascio di rette proprio di centro C (1; 2).

Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\ (-1; 0)$:

$$-1 - 1 = 2k \qquad k = -1$$

In tal caso, ho due soluzioni.



Impongo il passaggio del fascio per il punto $B\ \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}k - 1 + \frac{1}{2} = 2k \qquad k = -\frac{4+\sqrt{3}}{13}$$

In tal caso, ho una sola soluzione.

Determino il valore di k per la retta tangente, imponendo la distanza della retta dal centro della circonferenza uguale a 1:

$$\frac{|-1-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \qquad 1 + 4k + 4k^2 = 1 + k^2$$

$$3k^2 + 4k = 0 \qquad \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Il primo valore è quello della generatrice.

Si può perciò concludere:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\!:\ -1 < k \leq -\frac{4+\sqrt{3}}{13}} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\!:\ -\frac{4}{3} \leq k \leq -1}$$