1. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2001 – Sessione ordinaria)

Si tratta di un'applicazione della probabilità condizionata, infatti la probabilità è data da:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1) \cdot p(E_3|E_1 \cap E_2)$$

dato che i tre eventi E_1, E_2 ed E_3, corrispondenti, rispettivamente, all'estrazione del primo, del secondo e del terzo allievo maschio, non sono tra di loro indipendenti. Procedo con il calcolo:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \mathbf{\frac{11}{28}}$$

2. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determina il valore di p in percentuale. (Esame di Stato di Liceo Scientifico, 2017 – Sessione ordinaria)

Indico la probabilità della faccia numero 3 con p, come indicato dal testo. Siccome la faccia numero 3 ha una probabilità doppia rispetto a ognuna delle altre facce, le restanti 11 facce hanno ognuna probabilità $\frac{p}{2}$. Sapendo che l'evento "uscita di una faccia con numero inferiore a 13" è un evento certo, otteniamo:

$$p(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9 \cup 10 \cup 11 \cup 12) = 1$$

Essendo gli eventi incompatibili tra loro, possiamo esprimere la probabilità della somma logica dei dodici eventi come somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10) + p(11) + p(12) = 1$$

Ma, dal testo, sappiamo che:

$$p(1) = p(2) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = p(8) = p(9) = p(10) = p(11) = p(12) = \frac{p}{2} \qquad p(3) = p$$

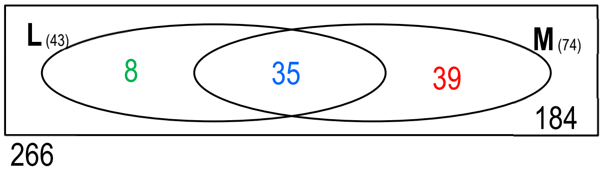
Perciò otteniamo l'equazione:

$$p + 11 \cdot \frac{p}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{2}p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{13} = \mathbf{15,38\%}$$

3. Su 266 studenti delle classi seconde del liceo scientifico, gli iscritti al corso di recupero di latino sono 43, quelli iscritti al corso di matematica sono 74, mentre 184 ragazzi non seguono alcuno dei due corsi. Scelto a caso uno studente delle classi seconde, qual è la probabilità che segua entrambi i corsi?

(Esercizio 228 p.71, dal libro Francesco Daddi, Calcolo delle probabilità, Edizione EBS print)

Rappresento la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, dove indico con L l'insieme degli studenti iscritti al corso di recupero di latino e con M l'insieme degli studenti iscritti al corso di recupero di matematica:



Sapendo che i ragazzi in totale sono 266 e che 184 non seguono nessuno dei due corsi:

$$266 - 184 = 82$$

82 è il numero degli studenti che seguono almeno un corso, ovvero è la cardinalità dell'insieme $L \cup M$.
Ma sommando gli elementi di L e M, otteniamo un totale di 117, con un eccesso di 35, ovvero:

$$117 - 82 = \mathbf{35}$$

La probabilità che uno studente segua entrambi i corsi è data quindi da: $p = \frac{35}{266} = \frac{5}{38} = \mathbf{13,16\%}$

Oppure, usando il teorema della somma logica per eventi compatibili:

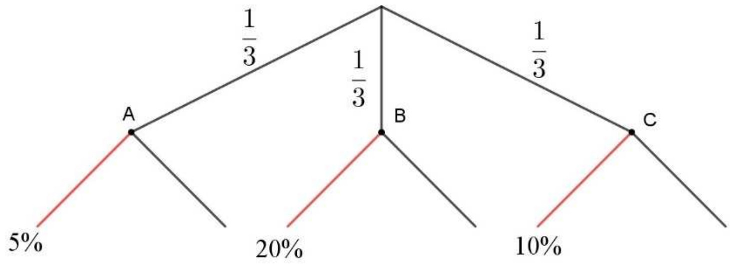
$$p(L \cup M) = p(L) + p(M) - p(L \cap M) \quad \Rightarrow \quad p(L \cap M) = p(L) + p(M) - p(L \cup M)$$

Ma per la probabilità contraria: $p(L \cup M) = 1 - p(\overline{L \cup M}) = 1 - \frac{184}{266} = \frac{82}{266}$.

Perciò: $p(L \cap M) = \frac{43}{266} + \frac{74}{266} - \frac{82}{266} = \frac{35}{266} = \mathbf{13,16\%}$.

4. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa? (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2003)

Possiamo facilmente rappresentare la situazione con un diagramma ad albero, dove la scelta delle tre scatole occupa i tre rami principali, equiprobabili e, quindi, con probabilità 1/3 di essere scelte.
Ad ogni scatola, associo la probabilità di estrarre la lampada difettosa, indicata al termine del ramo rosso di ogni scatola.



Possiamo calcolare a questo punto la probabilità richiesta:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{100}=\mathbf{\frac{7}{60}}$$

5. Si hanno due mazzi da 52 carte. Da ciascuno viene estratta una carta. Calcola la probabilità che:
   A. le due carte siano due re;
   B. siano due figure;
   C. almeno una carta sia un asso.

Si tratta di un'applicazione della probabilità del prodotto logico per eventi indipendenti, dato che l'estrazione di una carta dal primo mazzo non influenza l'estrazione della carta dal secondo mazzo. La probabilità del prodotto logico per eventi indipendenti è data da:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$$

dove A e B sono, rispettivamente, l'estrazione della carta dal primo mazzo e l'estrazione della carta dal secondo mazzo.

A. In un mazzo da 52 carte ci sono 4 re, perciò: $\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}=\mathbf{\frac{1}{169}}$

B. In un mazzo da 52 carte, le figure sono 3 per ogni seme, ovvero 12 in totale: $\frac{12}{52}\cdot\frac{12}{52}=\mathbf{\frac{9}{169}}$

C. Per calcolare la probabilità che almeno una carta sia un asso, è più semplice calcolare la probabilità contraria, ovvero che nessuna carta sia un asso. Dato che gli assi, in un mazzo da 52 carte, sono 4, le carte diverse dagli assi sono in totale 48:

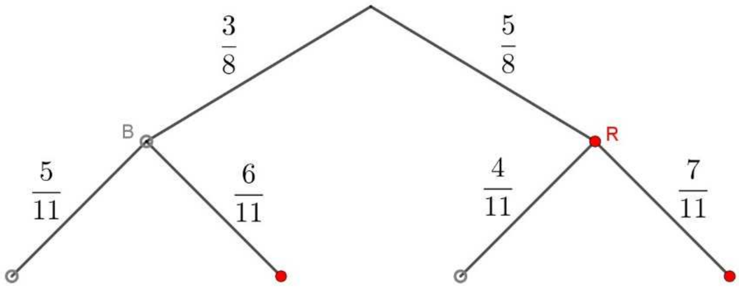
$$1-\frac{48}{52}\cdot\frac{48}{52}=\mathbf{\frac{25}{169}}$$

6. Si hanno due urne. La prima contiene 3 palline bianche e 5 rosse. La seconda ne contiene 4 bianche e 6 rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda. Si estrae poi una pallina dalla seconda urna. Calcola la probabilità che le palline siano:
   A. entrambe bianche;
   B. una bianca e una rossa.

Una volta rappresentata la situazione con un diagramma ad albero, diventa più facile risolvere il quesito:

A. $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{11}=\mathbf{\frac{15}{88}}$

B. $\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{11}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}=\mathbf{\frac{19}{44}}$



7. La tavola di mortalità mostra il numero di individui ancora in vita, su una popolazione di 100 000 persone, al variare dell'età raggiunta. Con riferimento alla tavola data, calcola la probabilità che:
   A. un uomo sia in vita a 51 anni;
   B. un uomo di 21 anni sia in vita a 51 anni;
   C. un uomo di 21 anni muoia entro i 51 anni;
   D. un uomo di 51 anni muoia tra i 65 e i 90 anni.

Tavola di mortalità (1992, uomini)	
Età	Viventi
21	98 261
51	92 590
65	79 189
90	9 271

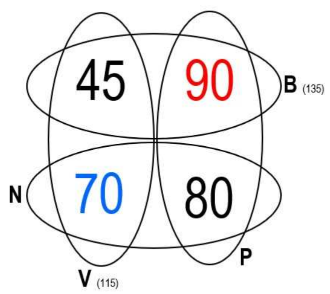
A. Il numero delle prove favorevoli è dato dal numero di uomini in vita a 51 anni, mentre il numero di prove effettuate è il totale della popolazione, ovvero: $\frac{92\,590}{100\,000} = \mathbf{92,59\ \%}$

B. Il numero delle prove favorevoli è dato ancora dal numero di uomini in vita a 51 anni, mentre il numero di prove effettuate, in questo caso, è dato dagli uomini in vita a 21 anni: $\frac{92\,590}{98\,261} = \mathbf{94,23\ \%}$

C. In questo caso possiamo usare la probabilità contraria, perché quanto richiesto è esattamente il contrario di quanto chiesto al punto precedente: $1 - \frac{92\,590}{98\,261} = \mathbf{5,77\ \%}$

D. Il numero di uomini in vita a 51 anni costituisce il numero delle prove effettuate, mentre il numero delle prove favorevoli è il numero di morti tra i 65 e i 90 anni, dato dalla differenza tra gli uomini in vita a 65 anni e quelli in vita a 90 anni: $\frac{79\,189 - 9\,271}{92\,590} = \mathbf{75,51\ \%}$

8. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro? (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2005 – Sessione straordinaria)



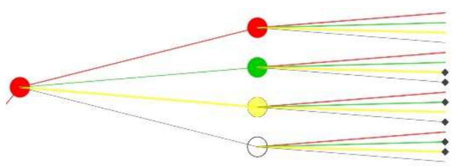
Sapendo che le biglie bianche sono in totale 135 e, di esse, 45 sono di vetro, allora 90 sono di plastica: $135 - 45 = \mathbf{90}$

Le biglie di vetro sono 115 e quelle bianche sono 45, perciò quelle nere sono 70: $115 - 45 = \mathbf{70}$

Sapendo che quelle di plastica nere sono 80, le biglie in totale sono: $45 + 90 + 70 + 80 = 285$

La probabilità di estrarre una biglia nera di vetro è: $\frac{70}{285} = \frac{14}{57} = \mathbf{24,6\%}$

9. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valuti la probabilità di estrarre tre palline di colori differenti. (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2014)



Realizzando una parte del diagramma ad albero (gli altri tre rami, che portano, rispettivamente, alla seconda biglia verde, gialla e bianca) possiamo determinare la probabilità di ogni ramo, moltiplicandola poi per 6 per avere i 6 punti di arrivo (indicati con il rombo nero) che corrispondono alle tre palline di colori differenti e poi per 4, visto che, come abbiamo detto, gli altri tre rami sono uguali.

Cominciamo con la probabilità che la prima pallina sia rossa: $\frac{5}{20}$

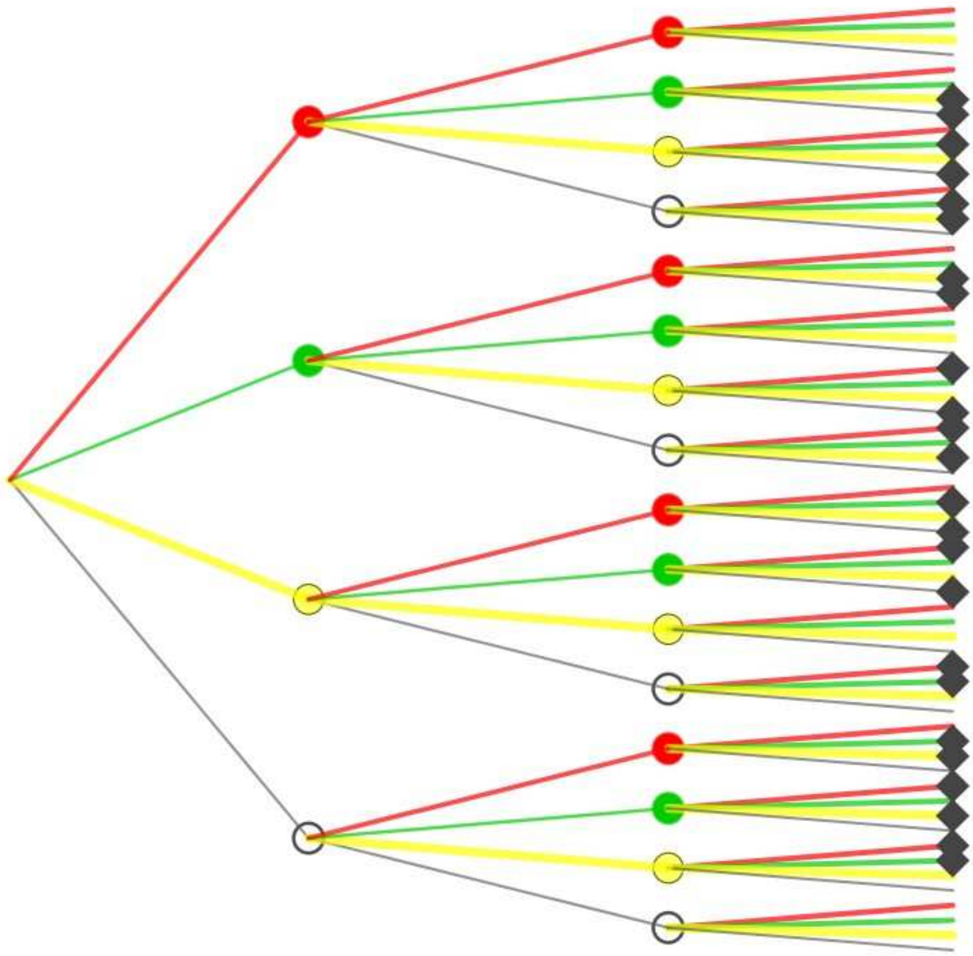
La probabilità che la seconda pallina sia (ad es.) verde, dato che il numero di palline è diminuito dopo la prima estrazione, è: $\frac{5}{19}$

La probabilità che la terza pallina sia (ad es.) gialla, dato che il numero di palline è diminuito dopo le prime due estrazioni, è: $\frac{5}{18}$

La probabilità di ogni singolo ramo è quindi data da: $\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18}$

Ora moltiplichiamo la probabilità appena determinata per 6 e poi per 4 e otteniamo il risultato richiesto: $\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot 6 \cdot 4 = \mathbf{\frac{25}{57}}$

Una soluzione alternativa (ma poco consigliata) può essere quella di realizzare l'intero diagramma ad albero…



Svolgendo tutti i calcoli, avremo la conferma del nostro risultato, visto che ogni ramo ha probabilità $\frac{5}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{5}{18}$ e i rami che rispettano le richieste del testo sono 24, perciò:

$$\frac{5}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot 24=\mathbf{\frac{25}{57}}$$

10. In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere, sapendo che estraendo 2 biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è 27/38. (Esame di Stato di Liceo Scientifico, 2016 – Sessione ordinaria, Scuole italiane all'estero, Americhe)

Indicato con x il numero di palline nere, calcolo la probabilità contraria di estrarre entrambe le palline nere, sapendo che:

- la probabilità di estrarre la prima biglia non nera (il numero di biglie rosse – ovvero non nere – è $20-x$) è: $\frac{20-x}{20}$
- la probabilità di estrarre la seconda biglia non nera (ora ce ne sono $19-x$ rosse) e quelle totali sono 19, è: $\frac{19-x}{19}$

$$1-\frac{20-x}{20}\cdot\frac{19-x}{19}=\frac{27}{38}$$

Facciamo i calcoli necessari per risolvere l'equazione: $20\cdot 19-(20-x)(19-x)=270$

$$20\cdot 19-20\cdot 19+20x+19x-x^2=270 \qquad x^2-39x+270=0$$

$$x_{1,2}=\frac{39\pm\sqrt{39^2-4\cdot 270}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{39+21}{2}=30\\ \frac{39-21}{2}=9\end{array}\right.$$

La prima non è accettabile, visto che è superiore al numero di palline, quindi resta $\mathbf{9}$.

11. Un oggetto fabbricato da un macchinario può presentare due tipi di difetti (A e B). La probabilità che un oggetto presenti il difetto A è $\frac{3}{10}$, la probabilità che presenti il difetto B è $\frac{1}{5}$, la probabilità che presenti entrambi i difetti è $\frac{1}{10}$.
    A. Qual è la probabilità che presenti almeno un difetto?
    B. Qual è la probabilità che l'oggetto non presenti neanche un difetto?
    C. Qual è la probabilità che presenti solo il difetto A?
    D. Qual è la probabilità che presenti solo il difetto B?

(Esercizio 206 p.65, dal libro Francesco Daddi, Calcolo delle probabilità, Edizione EBS print)

$$p(A) = \frac{3}{10} \qquad p(B) = \frac{1}{5} \qquad p(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

A. I due eventi sono compatibili e, per il teorema della somma logica, ottengo:
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

B. L'evento "l'oggetto non presenta neanche un difetto" è l'evento contrario del precedente:
$$1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

C. L'insieme per cui presenta solo il difetto A è dato da: $A - B = A \cap \bar{B}$
$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

D. Analogamente per il difetto B: $B - A = \bar{A} \cap B$
$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$

12. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610-1685), amico di *Blaise Pascal*: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?" (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2002 – Sessione ordinaria)

Ottenere almeno una volta 1 è l'evento contrario di non ottenere mai 1 in nessun lancio. Considerato, inoltre, che ogni lancio è indipendente dai precedenti, otteniamo:
$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = \mathbf{51,8\%}$$

Ottenere almeno un doppio 1 con 24 lanci è l'evento contrario di non ottenere mai un doppio 1 e, considerato che lanciando due dadi abbiamo 36 casi possibili e il doppio 1 è solo uno tra essi, la probabilità richiesta, visto che tutti i lanci sono indipendenti tra loro, è pari a:
$$p_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \mathbf{49,1\%}$$

Appare evidente che è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado che ottenere almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi.

13. Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il 47 sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'undicesima estrazione? Ricorda che, nel gioco del lotto, ogni volta per ogni ruota, vengono estratti senza reimmissione cinque numeri da un'urna contenente i numeri dall'uno al novanta. (Esame di Stato di Liceo Scientifico, Corso sperimentale PNI – 2005 – Sessione straordinaria)

La probabilità che il 47 non esca in una delle dieci estrazioni è data da:
$$\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{85}{86} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$$

Ogni estrazione è indipendente dalla precedente, perciò la probabilità che non esca 47 in nessuna delle prossime 10 estrazioni è data da:
$$\left(\frac{17}{18}\right)^{10}$$

L'evento "esce il 47 in un'estrazione" è l'evento contrario a "il 47 non esce nell'estrazione", perciò la probabilità che il 47 esca è data da:
$$1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$$

Possiamo quindi concludere il calcolo: $\left(\frac{17}{18}\right)^{10} \cdot \frac{1}{18} = \mathbf{3,14\%}$

14. Due eventi A e B sono equiprobabili e indipendenti. Sapendo che $p(A \cup B) = \frac{21}{25}$, quanto vale la probabilità dell'evento A?

(Esercizio 201 p.63, dal libro Francesco Daddi, Calcolo delle probabilità, Edizione EBS print)

Dato che i due eventi sono equiprobabili: $p(A) = p(B)$

Dato che i due eventi sono indipendenti: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Per il teorema della somma logica di eventi compatibili: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$

Ovvero: $p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{21}{25} \quad \Rightarrow \quad p(A) + p(A) - p(A) \cdot p(A) = \frac{21}{25}$

Ponendo: $p(A) = x$

Otteniamo l'equazione: $x + x - x \cdot x = \frac{21}{25}$

$$25\,x^2 - 50\,x + 21 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25 \cdot 25 - 21 \cdot 25}}{25} = \frac{25 \pm 10}{25} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \\ \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

Visto che quella che sto calcolando è una probabilità, il risultato deve essere minore di 1, perciò è accettabile solo la seconda soluzione, ovvero la probabilità dell'evento A è pari al $\mathbf{60\%}$.