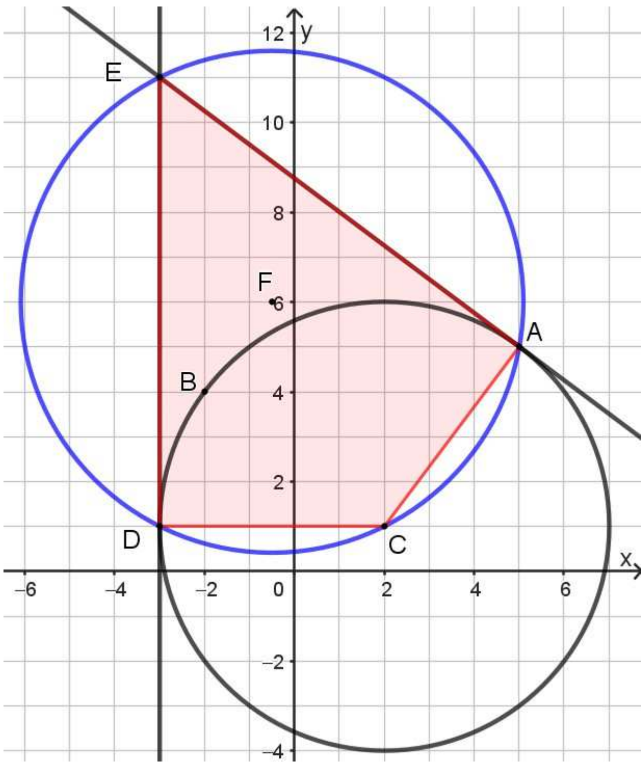
1. Sono dati i punti $A(5;5)$, $B(-2;4)$ e $D(-3;1)$.
   A. Scrivi l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C passante per i tre punti.
   B. Determina la retta s per A e la retta t per D, tangenti alla circonferenza.
   C. Detto E il punto di intersezione di s e t, spiega perché il quadrilatero AEDC è inscrivibile in una circonferenza e determina l'equazione della circonferenza circoscritta.
   D. Calcola l'area di AEDC.



A. Determino l'intersezione tra l'asse della corda AB e l'asse della corda BD:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y-4)^2\\(x+2)^2+(y-4)^2=(x+3)^2+(y-1)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x+y-15=0\\x+3y-5=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=5-3y\\35-21y+y-15=0\end{cases}$$

Il centro ha quindi coordinate: $C(2;1)$ e raggio $r=\overline{CD}=5$.
Posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-4x-2y-20=0}$$

B. Determino le equazioni delle tangenti richieste. Nel caso della retta per D, visto che D e C hanno la stessa ordinata, e quindi il raggio DC è parallelo all'asse x, la tangente sarà perpendicolare all'asse x e avrà equazione: $\boldsymbol{t: x=-3}$.
Per determinare la seconda tangente, uso la formula di sdoppiamento:

$$5x+5y-4\frac{x+5}{2}-2\frac{y+5}{2}-20=0$$

$$\boldsymbol{s: 3x+4y-35=0}$$

C. Determino le coordinate dell'intersezione, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases}x=-3\\3x+4y-35=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-3\\y=11\end{cases}\qquad E(-3;11)$$

Il quadrilatero AEDC è sicuramente inscrivibile in una circonferenza, infatti $AC\perp AE$ e $DC\perp DE$, perché AC e DC sono raggi e le i segmenti AE e DE sono sulle rispettive tangenti. Perciò, dato che gli angoli opposti del quadrilatero sono supplementari, il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza. Non solo: il quadrilatero è dato da due triangoli rettangoli CAE e EDC con l'ipotenusa in comune. Il centro della circonferenza circoscritta è il punto medio dell'ipotenusa:

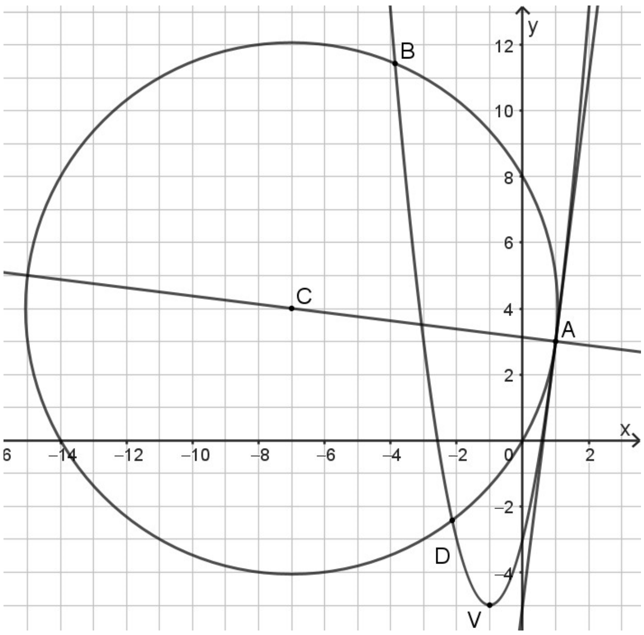
$$F\left(-\frac{1}{2};6\right)\qquad r'=\overline{FC}=\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+(1-6)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{1+4}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$$

L'equazione della circonferenza è: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-6)^2=\frac{125}{4}$ $\qquad\boldsymbol{x^2+y^2+x-12y+5=0}$

D. L'area del quadrilatero AEDC è il doppio dell'area del triangolo CED:

$$\mathcal{A}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{DE}=5\cdot10=\boldsymbol{50}$$

2. Sia data la parabola con asse parallelo all'asse y, di vertice $V(-1;\ -5)$ e passante per $A(1;3)$.
   A. Determina l'equazione della parabola.
   B. Determina l'equazione della circonferenza tangente alla parabola nel punto A e con centro di ascissa -7.
   C. Determina le ascisse degli altri due punti di intersezione tra la circonferenza e la parabola.



A. Determino l'equazione della parabola usando l'ascissa generica del vertice ($x_V = -\frac{b}{2a}$) e imponendo il passaggio della parabola per il punto A e per V, cioè sostituendo le coordinate di A e di V nell'equazione generica della parabola: $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ -5 = a - b + c \\ 3 = a + b + c \end{cases}$$

Sottraendo tra loro la seconda e la terza equazione, determino il parametro b. Sostituendolo nella prima ottengo a e, sostituendo i due valori nella terza equazione (ma va bene anche la seconda) ottengo c:

$$\begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \\ 2 + 4 + c = 3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = 2x^2 + 4x - 3}$$

B. Secondo il testo, parabola e circonferenza sono tangenti in A e questo significa che le due coniche condividono la tangente in A. Determino, quindi, l'equazione della tangente alla parabola in A, usando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y+3}{2} = 2x + 4\frac{x+1}{2} - 3 \qquad y + 3 = 4x + 4x + 4 - 6 \qquad y = 8x - 5$$

Determino, quindi, la retta perpendicolare alla tangente e passante per A. Sostituendo nella retta l'ascissa del centro della circonferenza (-7), ottengo l'ordinata del centro C, poi determino la misura del raggio calcolando la distanza del centro dal punto A:

$$\begin{cases} y - 3 = -\dfrac{1}{8}(x-1) \\ x = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 3 = 1 \\ x = -7 \end{cases} \qquad C(-7;\ 4) \qquad r = \overline{CA} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$$

A questo punto posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x+7)^2 + (y-4)^2 = 65 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 + 14x - 8y = 0}$$

C. Determino le coordinate delle intersezioni tra circonferenza e parabola, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3 \\ x^2 + y^2 + 14x - 8y = 0 \end{cases} \qquad x^2 + 4x^4 + 16x^2 + 9 + 16x^3 - 12x^2 - 24x + 14x - 16x^2 - 32x + 24 = 0$$

$$4x^4 + 16x^3 - 11x^2 - 42x + 33 = 0$$

Posso applicare due volte l'algoritmo di Ruffini, con $x = 1$, corrispondente all'ascissa di A (punto di tangenza) e poi risolvere l'equazione di secondo grado che ne scaturisce:

	4	16	−11	−42	33
1		4	20	9	−33
	4	20	9	−33	0
1		4	24	33	
	4	24	33	0	

$$4x^2 + 24x + 33 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 132}}{4} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\frac{-6 \pm \sqrt{3}}{2}}$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per l'origine O e tangente alla retta di equazione $3x + 2y + 2 = 0$ nel suo punto di ascissa -2. Detti A e B i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con gli assi cartesiani, e il punto O' simmetrico di O rispetto al centro della circonferenza, determina un punto P sulla semicirconferenza che contiene l'origine in modo che l'area del quadrilatero O'BPA sia uguale a 68.

Determino le coordinate del punto di tangenza: sostituendo la sua ascissa nell'equazione della retta, ottengo $T(-2; 2)$.
Scrivo l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto T alla retta data, usando come generatrici le due circonferenze degeneri, ovvero la retta tangente e la circonferenza con centro T e raggio nullo:

$$k\,(3x + 2y + 2) + (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Dato che la circonferenza $\mathcal{C}$ passa per l'origine, determino il valore del parametro sostituendo le coordinate dell'origine nell'equazione:

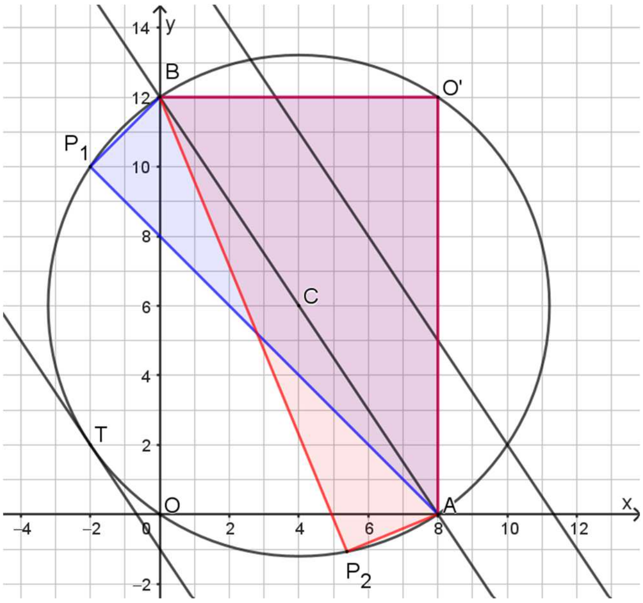
$$2k + 4 + 4 = 0 \qquad k = -4$$

Sostituisco il parametro nell'equazione del fascio:

$$-12x - 8y - 8 + x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0$$

Determino le coordinate dei punti A e B, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(8; 0) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad B(0; 12)$$



Devo determinare il punto P, in maniera tale che il quadrilatero O'BPA abbia area 68. Il triangolo O'BA ha area:

$$\mathcal{A}_{O'BA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{O'A} \cdot \overline{O'B} = \frac{1}{2} y_B x_A = 48$$

Perciò il triangolo ABP ha area 20. La base AB ha lunghezza:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 4\sqrt{13}$$

Perciò l'altezza del triangolo, cioè la distanza del punto P dalla base AB, ha lunghezza:

$$\mathcal{A}_{APB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\,\mathcal{A}_{APB}}{\overline{AB}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

Pongo, quindi, la distanza del generico punto P dalla retta passante per A e per B, uguale all'altezza:

$$rta\ (A; B):\ y = \frac{12 - 0}{0 - 8}(x - 8) \qquad y = -\frac{3}{2}x + 12$$

$$h = \frac{|3x + 2y - 24|}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \qquad |3x + 2y - 24| = 10$$

Visto che il punto P si trova nella semicirconferenza a cui appartiene l'origine, si trova nel semipiano negativo individuato dalla retta AB, perciò l'equazione diventa:

$$-3x - 2y + 24 = 10 \qquad 3x + 2y - 14 = 0$$

Per determinare le coordinate del punto P, devo mettere a sistema la retta appena individuata con l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0 \\ 3x + 2y - 14 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 7 \\ x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 - 21x + 49 - 8x + 18x - 84 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{13}{4}x^2 - 11x - 35 = 0 \qquad 13x^2 - 44x - 140 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 1820}}{13} = \frac{22 \pm 48}{13} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ \dfrac{70}{13} \end{matrix} \right.$$

Le coordinate dei due punti da determinare sono:

$$\boldsymbol{P_1\,(-2; 10)} \qquad \boldsymbol{P_2\left(\frac{70}{13}; -\frac{14}{13}\right)}$$