Risolvi:

1. $sen^2 x + 2\sqrt{3}\, sen\, 2x + \cos^2 x + 2 = 0$

Primo metodo:

$$2\sqrt{3}\, sen\, 2x + 1 + 3 = 0$$

$$sen\, 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

Secondo metodo: equazione goniometrica di secondo grado riconducibile a omogenea:

$$3\, sen^2 x + 4\sqrt{3}\, sen\, x \cos x + 3\, \cos^2 x = 0$$

Si tratta di un'equazione omogenea di secondo grado. Divido entrambi i membri per $\cos^2 x$, avendo verificato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione data:

$$3\, tg^2 x + 4\sqrt{3}\, tg\, x + 3 = 0$$

$$tg\, x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 9}}{3} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

2. $\sqrt{3}\, sen\, 3x + \cos 3x = \sqrt{3}$

Si tratta di un'equazione lineare in seno e coseno. Procedo con il metodo grafico:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\, Y + X = \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{3} - \sqrt{3}\, Y \\ 3 + 3Y^2 - 6Y + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad 2Y^2 - 3Y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \qquad 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi}$$

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi}$$

3. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi - 2x + 2k\pi \qquad 5x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi \qquad \boldsymbol{x = \frac{11}{60}\pi + \frac{2}{5}k\pi}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3}\pi + 2x + 2k\pi \qquad \boldsymbol{x = -\frac{5}{12}\pi + 2k\pi}$$

4. $-\sqrt{\dfrac{sen\ 2x}{\cos^2 x}} \leq 0$

Una radice quadrata è sempre positiva, con il segno negativo è sempre nulla, perciò bisogna risolvere le condizioni di accettabilità del radicando:

$$\frac{2\ sen\ x \cos x}{\cos^2 x} \geq 0 \qquad 2\ tg\ x \geq 0 \qquad \boldsymbol{k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

5. $\dfrac{4\cos^2 \frac{x}{2} - 2 - \cos x - 2\ sen^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 x} \geq 0$

$$\frac{4\ \frac{1+\cos x}{2} - 2 - \cos x - 2\frac{1-\cos x}{2}}{\cos^2 x} \geq 0$$

$$\frac{2\cos x - 1}{\cos^2 x} \geq 0$$

Il denominatore della frazione è sicuramente non negativo, ma devo essere sicura che sia diverso da zero. Resta quindi il numeratore, che è positivo, solo dove il denominatore non è nullo:

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

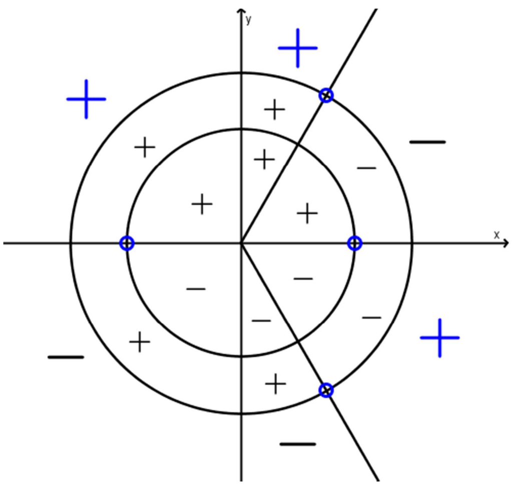
6. $sen\ x > sen\ 2x$

$$sen\ x - 2\ sen\ x \cos x > 0$$

$$sen\ x\ (1 - 2\cos x) > 0$$

$$IF: sen\ x > 0$$

$$II\ F: \cos x < \frac{1}{2}$$



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi}$$

7. $\begin{cases} sen^2 x - 1 \leq 0 \\ sen^2 x - sen\, x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -1 \leq sen\, x \leq 1 \\ sen\, x \leq 0 \quad \vee \quad sen\, x \geq 1 \end{cases}$$

La prima disequazione è sempre verificata
Il sistema ha quindi soluzione:

$$\boldsymbol{\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

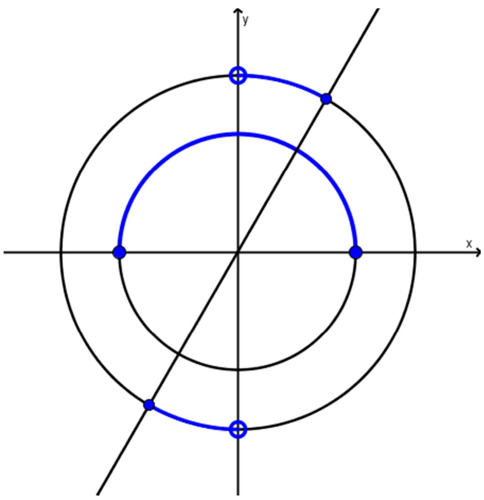
8. Determina il dominio della funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{tg\, x - \sqrt{3}} + \sqrt{sen\, x}}{\cos x}$$

$$\begin{cases} tg\, x - \sqrt{3} \geq 0 \\ sen\, x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} tg\, x \geq \sqrt{3} \\ sen\, x \geq 0 \end{cases}$$

La terza disequazione è compresa nel dominio della tangente della prima disequazione

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$



9. Discuti, individuando graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} k\cos x + sen\, x = 1 - 2k \\ \frac{3}{4}\pi \le x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} kX + Y = 1 - 2k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X < 0; -1 < Y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La prima equazione è rappresentata da un fascio di rette proprio di centro C (– 2; 1).

Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$-k\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2k \qquad k\left(4 - \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

$$k = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

In tal caso, ho una soluzione.

Impongo il passaggio del fascio per il punto $B\ (0; -1)$:

$$-1 = 1 - 2k \qquad k = 1$$

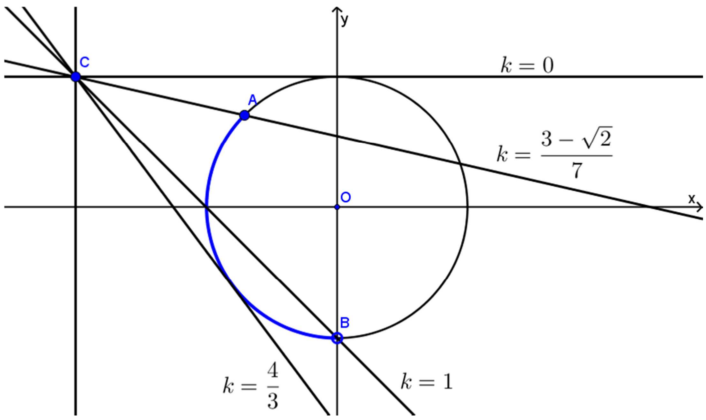
In tal caso, ho una sola soluzione.

Determino il valore di k per la retta tangente, imponendo la distanza della retta dal centro della circonferenza uguale a 1:

$$\frac{|1 - 2k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1 \qquad 1 - 4k + 4k^2 = 1 + k^2$$

$$3k^2 - 4k = 0 \qquad \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Il primo valore è quello della generatrice.



Si può perciò concludere:

$$\mathbf{1\ soluzione}: \frac{3 - \sqrt{2}}{7} \le k \le 1 \qquad \mathbf{2\ soluzioni}: 1 < k \le \frac{4}{3}$$