1. Completa la tabella:

$a = 4$	$b = 1$	Ellisse con i fuochi sull'asse x	$\boldsymbol{e = \frac{\sqrt{15}}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{16} + y^2 = 1}$
$b = 3$	$c = 2$	Ellisse con i fuochi sull'asse y	$\boldsymbol{e = \frac{2}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$
$a = 1$	$c = 2$	Iperbole con i fuochi sull'asse x	$\boldsymbol{e = 2}$	$\boldsymbol{x^2 - \frac{y^2}{3} = 1}$
$a = 1$	$b = 3$	Iperbole con i fuochi sull'asse y	$\boldsymbol{e = \frac{\sqrt{10}}{3}}$	$\boldsymbol{x^2 - \frac{y^2}{9} = -1}$

2. Determina l'equazione dell'ellisse passante per i punti $(-2\sqrt{5}; 3)$ e $\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}; 2\sqrt{2}\right)$. Rappresenta in un piano cartesiano l'ellisse.

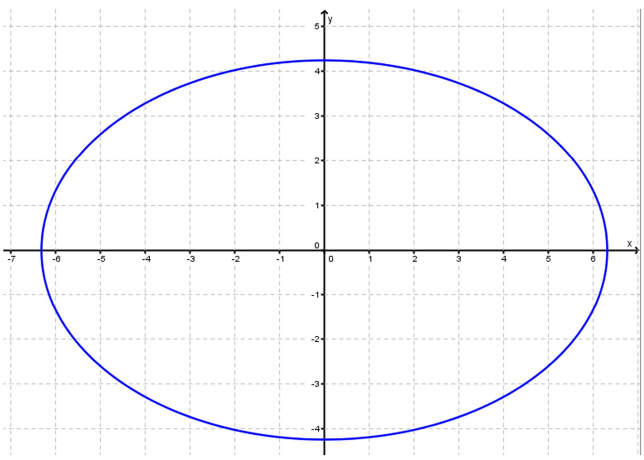
Impongo il passaggio dell'ellisse per i punti dati, scrivendo l'equazione canonica in questo modo: $Ax^2 + By^2 = 1$:

$$\begin{cases} 20A + 9B = 1 \\ \frac{200}{9}A + 8B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = \frac{20}{9}A \\ 40A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{40} \\ B = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$-\frac{20}{9}A + B = 0$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{18} = 1}$$



3. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $4y^2 - 9x^2 = 36$ condotte dal punto dell'asse x di ascissa $-\frac{3}{2}$. Rappresenta in un piano cartesiano l'iperbole e le tangenti.

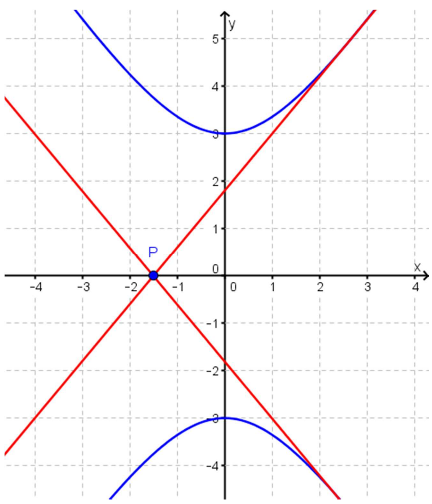
Metto a sistema l'equazione dell'iperbole con l'equazione del fascio proprio di rette centrato nel punto dato e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} 4y^2 - 9x^2 = 36 \\ y = m\left(x + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \qquad 4m^2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - 9x^2 = 36$$

$$x^2(4m^2 - 9) + 12m^2x + 9m^2 - 36 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36m^4 + 9(4 - m^2)(4m^2 - 9) = 0$$

$$4m^4 + 16m^2 - 36 - 4m^4 + 9m^2 = 0 \qquad m = \pm\frac{6}{5}$$



Le equazioni delle tangenti sono: $\boldsymbol{y = \pm\frac{6}{5}x \pm \frac{9}{5}}$

4. Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k^2-9}+\frac{y^2}{11-k}=1$ rappresenta:
   A. un'ellisse;
   B. una circonferenza;
   C. un'iperbole;
   D. un'iperbole con asintoti $y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}x$.

A. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i due denominatori devono essere contemporaneamente positivi:

$$\begin{cases} k^2-9>0 \\ 11-k>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<-3 \quad \vee \quad k>3 \\ k<11 \end{cases} \qquad \boldsymbol{k<-3 \quad \vee \quad 3<k<11}$$

B. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due denominatori devono essere uguali e poi devo verificare che siano entrambi positivi, ovvero che i valori determinati siano compresi nell'intervallo determinato al punto a:

$$k^2-9=11-k \quad \Rightarrow \quad k^2+k-20=0 \quad \Rightarrow \quad (k+5)(k-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=-5 \quad \vee \quad k=4}$$

C. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due denominatori devono essere discordi:

$$(k^2-9)(11-k)<0 \qquad \boldsymbol{-3<k<3 \quad \vee \quad k>11}$$

che è l'intervallo complementare di quello determinato per l'ellisse.

D. Determino gli asintoti dell'iperbole data, considerando $a^2=k^2-9$ e $b^2=k-11$, perciò:

$$\frac{k-11}{k^2-9}=\frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad 5k-55=9k^2-81 \quad \Rightarrow \quad 9k^2-5k-26=0$$

$$k_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+936}}{18}=\frac{5\pm 31}{18}=\left\langle \begin{matrix} 2 \\ -\frac{13}{9} \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=2 \quad \vee \quad k=-\frac{13}{9}}$$