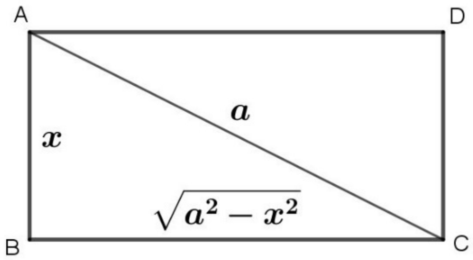
1. Fra tutti i rettangoli di data diagonale a, determina il perimetro di quello che genera, in una rotazione completa intorno a un suo lato, il cilindro di volume massimo.

Indico uno dei lati del rettangolo con x e l'altro lato, applicando il teorema di Pitagora e conoscendo la diagonale del rettangolo, è $\sqrt{a^2-x^2}$. Considero la rotazione completa del rettangolo attorno al lato AB e si genera un cilindro di altezza x e raggio di base $\sqrt{a^2-x^2}$ il cui volume è dato da:

$$f(x)=\pi x\,(a^2-x^2)$$

e il cui dominio (che possiamo determinare sia algebricamente che geometricamente) è: $0<x\le a$.



Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

$$f'(x)=\pi(a^2-3x^2)=0 \qquad x=\pm\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Le soluzioni dell'equazione sono punti stazionari della funzione: $a^2-3x^2>0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{a\sqrt{3}}{3}<x<\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ è un punto di massimo per la funzione. Quindi i due lati del rettangolo hanno dimensioni $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, e il perimetro del rettangolo è:

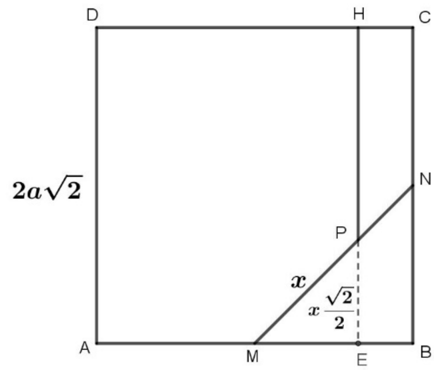
$$2p=2\frac{a\sqrt{3}}{3}+2\frac{a\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{2\frac{a\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{2})}$$

2. Sia ABCD un quadrato di lato $2a\sqrt{2}$ e siano M e N i punti medi di due lati consecutivi. Sul segmento MN, determina un punto P tale che sia minima la somma $\overline{PH}^2+\overline{PM}^2$, dove H è la proiezione di P sul lato opposto a quello contenente M.

Traccio il segmento MN, di lunghezza $2a$. Su di esso individuo il punto P, posto a distanza x da M. Per determinare la lunghezza del segmento PH, considero il triangolo PME, rettangolo e isoscele, tale che i suoi cateti abbiano lunghezza (data l'ipotenusa x) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$.
Siccome $\overline{PH}=\overline{HE}-\overline{PE}=\overline{AD}-\overline{PE}=2a\sqrt{2}-\frac{x\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(4a-x)$. Possiamo quindi determinare la funzione richiesta:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}(4a-x)^2$$

e il cui dominio (che possiamo determinare sia algebricamente che geometricamente) è: $0<x\le 2a$.



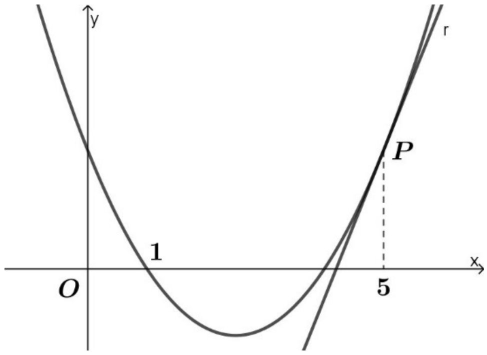
Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

$$f'(x)=2x-(4a-x)=3x-4a=0 \qquad x=\frac{4}{3}a$$

La soluzione dell'equazione è un punto stazionario della funzione: $3x-4a>0 \quad\Rightarrow\quad x>\frac{4}{3}a$

$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}a}$ è un punto di minimo per la funzione.

3. Scrivi l'equazione della parabola in figura, tangente in P alla retta r di equazione $5x - 2y = 21$.
Considera poi il punto Q di ordinata $\frac{3}{8}$ appartenente all'asse della parabola e determina le coordinate dei punti P_1 e P_2 sulla parabola che hanno distanza minima da Q.



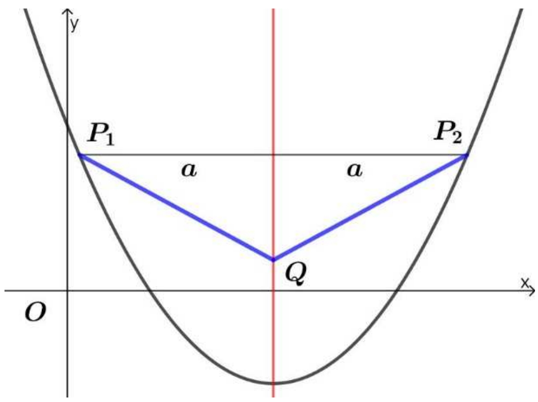
La parabola data ha generica equazione $y = ax^2 + bx + c$. Le condizioni necessarie per determinarla sono:

- il passaggio per il punto $(1; 0)$, ovvero sostituisco le coordinate del punto nell'equazione della parabola;
- il passaggio per il punto P che ha ascissa 5 e appartiene alla retta r, perciò ha ordinata $25 - 2y = 21 \quad \Rightarrow \quad y = 2$;
- il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto di ascissa 5, ovvero il coefficiente angolare della retta r, che si ottiene determinando la derivata della funzione e calcolandone il valore in P: $y' = 2ax + b$.

$$\begin{array}{l} (1;0) \\ (5;2) \\ y'(5) = \dfrac{5}{2} \end{array} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 25a+5b+c=2 \\ 10a+b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 12\,a+2b=1 \\ 20a+2b=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{5}{2} \\ c=2 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2}$.

Il punto Q appartiene all'asse di simmetria, perciò ha coordinate: $Q\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{8}\right)$.



Si può facilmente intuire che i punti P_1 e P_2 sono simmetrici rispetto all'asse di simmetria, quindi hanno la stessa ordinata. Considero $a \geq 0$ la loro distanza dall'asse di simmetria e ne determino quindi le coordinate:

$$P_1\left(\frac{5}{2} - a; \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - a\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - a\right) + 2\right) = \left(\frac{5}{2} - a; \frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8}\right)$$

$$P_2\left(\frac{5}{2} + a; \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + a\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + a\right) + 2\right) = \left(\frac{5}{2} + a; \frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8}\right)$$

La funzione da determinare è: $f(a) = \overline{QP_1}$, visto che, per simmetria, le due distanze sono uguali:

$$f(a) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8} - \frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

$$f'(a) = \frac{2a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}a\frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}\right)^2}} = 0 \qquad a = \pm 1 \lor a = 0$$

Le soluzioni dell'equazione sono punti stazionari della funzione: $a(a^2 - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < a < 0 \;\lor\; a > 1$

$a = 1$ è un punto di minimo per la funzione e i due punti richiesti hanno coordinate: $\boldsymbol{P_1}\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{8}\right)$ e $\boldsymbol{P_2}\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{8}\right)$.