1. Tra tutti i cilindri per i quali è costante e uguale ad a la somma dell'altezza e del raggio di base, determina quello di volume massimo.

Nel cilindro, indichiamo con x il raggio di base e con $a-x$ l'altezza. Il volume è quindi espresso dalla funzione: $f(x)=\pi x^2\,(a-x)$, il cui dominio, che possiamo determinare sia algebricamente che geometricamente, è $0<x<a$.
Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

$$f'(x)=\pi(2ax-3x^2)=0 \qquad\qquad x=0 \quad x=\frac{2}{3}a$$

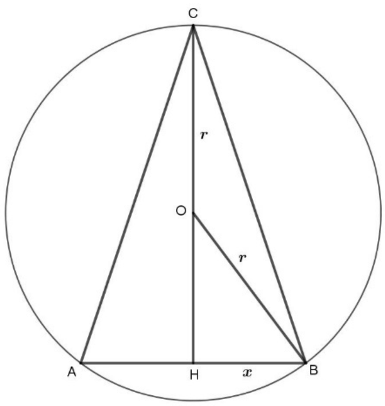
Le soluzioni dell'equazione sono punti stazionari della funzione: $2ax-3x^2>0 \qquad \Rightarrow \qquad 0<x<\frac{2}{3}a$

$x=\frac{2}{3}a$ è un punto di massimo per la funzione. Quindi il cilindro ha raggio di base pari a $\frac{2}{3}a$ e altezza $\frac{1}{3}a$, pertanto il suo volume è:

$$V=\pi\cdot\frac{4}{9}a^2\cdot\frac{1}{3}a=\boldsymbol{\frac{4}{27}\pi a^3}$$

2. Tra tutti i triangoli isosceli di area costante $\frac{1}{2}a^2$, determina quello per il quale risulta minimo il raggio del cerchio circoscritto.

Inscritto il triangolo isoscele di base AB in una circonferenza di centro O, indico con $2x$ la base del triangolo (e quindi, indicato con H il punto medio della base, nonché piede dell'altezza relativa alla base, $\overline{HB}=\overline{AH}=x$). Sapendo che l'area del triangolo è pari a $\frac{1}{2}a^2$, l'altezza $\overline{CH}=\frac{2A}{\overline{AB}}=\frac{a^2}{2x}$. Possiamo quindi determinare la funzione richiesta, ovvero il raggio, applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHB:



$$\overline{OB}^2=\overline{HB}^2+\overline{OH}^2 \qquad\qquad r^2=x^2+\left(\frac{a^2}{2x}-r\right)^2$$

$$r^2=x^2+\frac{a^4}{4x^2}+r^2-\frac{a^2r}{x} \qquad\qquad f(x)=\frac{a^2}{4x}+\frac{x^3}{a^2}$$

e il cui dominio (che possiamo determinare sia algebricamente che geometricamente) è $x>0$.

Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

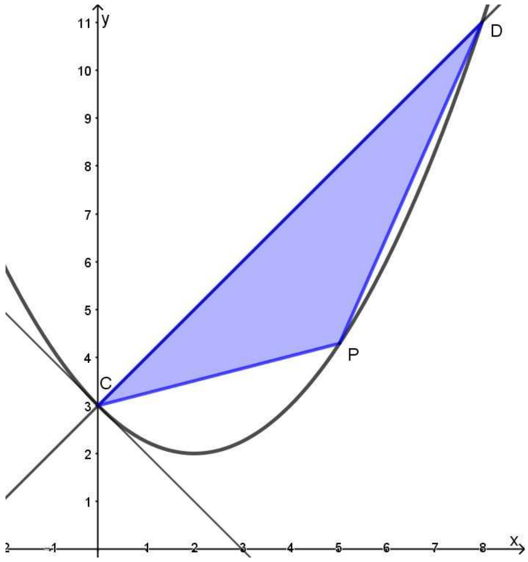
$$f'(x)=-\frac{a^2}{4x^2}+\frac{3x^2}{a^2}=\frac{12\,x^4-a^4}{4a^2x^2}=\frac{\left(2\sqrt{3}\,x^2+a^2\right)\left(2\sqrt{3}\,x^2-a^2\right)}{4a^2x^2}=0 \qquad\qquad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

Le soluzioni dell'equazione sono punti stazionari della funzione: $2\sqrt{3}\,x^2-a^2>0 \qquad \Rightarrow \qquad x<-\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \ \vee \ x>\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

$\boldsymbol{x=\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{3}}}}$ è un punto di minimo per la funzione.

Possiamo verificare che, essendo l'altezza pari a: $\overline{CH}=\frac{a^2}{2\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{3}}}}=\frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{3}}=\overline{HB}\tan\frac{\pi}{3}$, si tratta di un **triangolo equilatero**.

3. Data la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$, determina la normale n a essa nel suo punto di intersezione C con l'asse y, indicando con D l'ulteriore punto di intersezione di n con la parabola. Determina il punto P sull'arco CD di parabola tale che l'area del triangolo PCD sia massima.



Il punto di intersezione della parabola con l'asse y ha coordinate: $C\ (0; 3)$. Possiamo determinare l'equazione della normale alla parabola nel punto C usando le derivate, dato che la sua equazione sarà:

$$y - y_C = -\frac{1}{f'(x_C)}\ (x - x_C)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 \qquad f'(0) = -1$$

$$n: y - 3 = 1\ (x - 0) \qquad y = x + 3$$

Determiniamo le coordinate dell'ulteriore punto di intersezione con la parabola, mettendo a sistema l'equazione della normale con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3 \\ y = x + 3 \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x^2 - x + 3 = x + 3 \qquad \frac{1}{4}x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 8) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 8 \qquad D(8; 11)$$

Il punto P generico ha coordinate: $P\left(x; \frac{1}{4}x^2 - x + 3\right)$ con $0 \le x \le 8$. Determiniamo la distanza di P dalla normale, usando la formula della distanza di un punto da una retta:

$$d(P; n) = \frac{\left|x - \frac{1}{4}x^2 + x - 3 + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}|8x - x^2|$$

Dato che $0 \le x \le 8$, possiamo scrivere $d(P; n) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(8x - x^2)$, con la certezza che si tratti di una quantità positiva.

Determiniamo la lunghezza del segmento CD, base del triangolo: $\overline{CD} = \sqrt{(0-8)^2 + (3-11)^2} = 8\sqrt{2}$.

Abbiamo, quindi, la funzione che rappresenta l'area del triangolo:

$$f(x) = \frac{1}{2}d(P; n) \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}(8x - x^2) = 8x - x^2$$

Calcoliamo la derivata della funzione e procediamo con lo studio del suo segno:

$$f'(x) = 8 - 2x = 0 \qquad x = 4$$

La soluzione dell'equazione è un punto stazionario della funzione: $8 - 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4$

$x = 4$ è un punto di massimo per la funzione e il punto richiesto ha coordinate: $\boldsymbol{P(4; 3)}$.