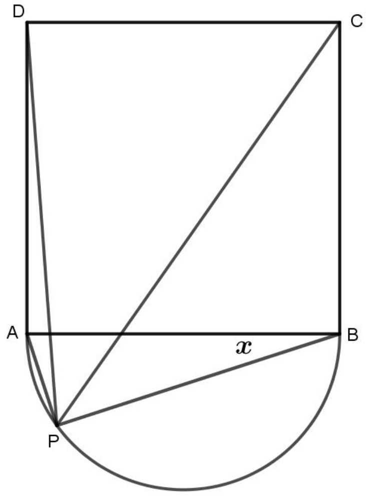
1. Dato il quadrato ABCD di lato 1, costruisci una semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato. Considerato sulla semicirconferenza un punto P, con $A\hat{B}P = x$, determina l'espressione della funzione:

$$f(x) = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$$



Per determinare i segmenti richiesti, applico il teorema del coseno ai triangoli PBC e PDA. Mi serve quindi la lunghezza dei segmenti PB e PA e per determinarli applico il teorema della corda, notando che PA sottende l'angolo x, mentre PB sottende un angolo complementare, visto che il triangolo APB è un triangolo rettangolo (in quanto iscritto in una semicirconferenza e con un lato coincidente con il diametro):

$$\overline{PA} = \overline{AB} \sin x = \sin x \qquad \overline{PB} = \overline{AB} \cos x = \cos x$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{PB} \cdot \overline{BC} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \cos^2 x + 1 - 2\cos x\ (-\sin x) = 1 + 2\cos x \sin x + \cos^2 x$$

L'angolo opposto al lato PC è dato dalla somma tra l'angolo x e l'angolo del quadrato, che è un angolo retto, per questo motivo ho scritto $x + \frac{\pi}{2}$ e poi, applicando gli archi associati, ho trovato l'opposto di $\sin x$.

$$\overline{PD}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{AD} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin^2 x + 1 - 2\sin x\ (-\cos x) = 1 + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$$

L'angolo opposto al lato PD è la somma dell'angolo BAP, che è il complementare di PBA, ovvero di x, e dell'angolo del quadrato, perciò è il supplementare di x, come mostrato dai calcoli.
Possiamo quindi concludere il percorso:

$$f(x) = 1 + 2\cos x \sin x + \cos^2 x + 1 + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \mathbf{3 + 2\sin 2x}$$

2. Determina graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - k\sin x + 2 - 4k = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x - k\sin x + 2 - 4k = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Pongo $Y = \sin x$:

$$\begin{cases} (1-k)\,Y + 2 - 4k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1; -1 \le Y \le 1 \end{cases}$$

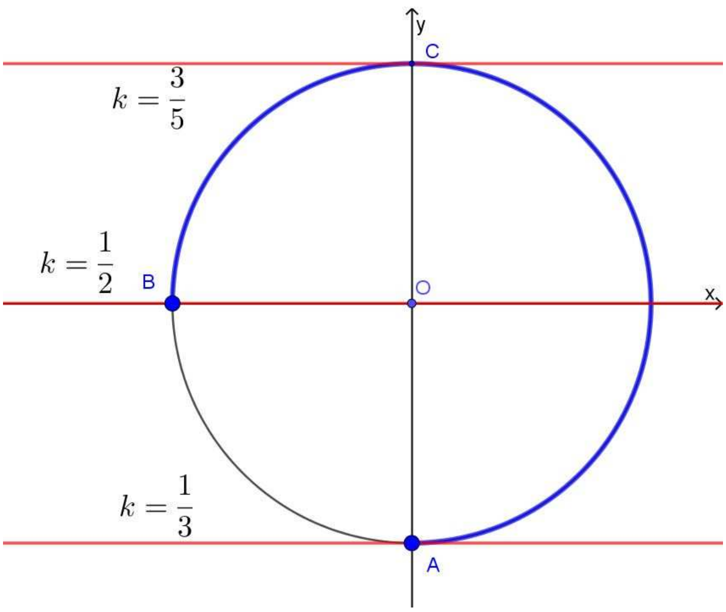
Si tratta di un fascio di rette parallele all'asse X.
Secondo le limitazioni, otteniamo l'arco rappresentato in blu, limitato dai punti A e B. Impongo quindi il passaggio del fascio per i punti A e B, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione del fascio.

$A\ (0;\ -1): -1 + k + 2 - 4k = 0 \qquad k = \frac{1}{3}$

$B\ (-1; 0): 2 - 4k = 0 \qquad k = \frac{1}{2}$

Per determinare la tangente, impongo il passaggio per il punto C, perché la retta tangente alla circonferenza parallela all'asse x passa per C:

$C\ (0;\ 1): 1 - k + 2 - 4k = 0 \qquad k = \frac{3}{5}$



$\mathbf{1\ sol.: \frac{1}{3} \le k < \frac{1}{2}} \qquad \mathbf{2\ sol.: \frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{5}}$

Risolvi:

3. $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$

   Pongo: $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=t$

$$2t^2-t-1=0 \qquad t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\left\langle\begin{matrix}1\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \qquad x-\frac{\pi}{3}=2k\pi \qquad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \begin{matrix}x-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}x=\pi+2k\pi \\ x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi\end{matrix}$$

   Riassumendo, possiamo scrivere: $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi}$

4. $\tan\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=\cot\left(\frac{2}{5}\pi-2x\right)$

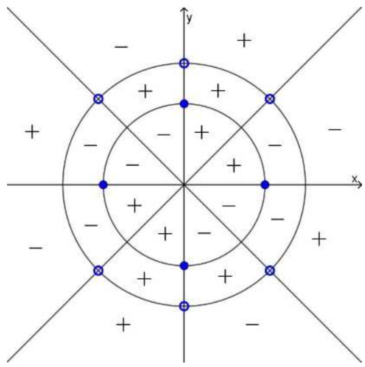
   Per gli archi associati, sappiamo che: $\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\tan\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\pi+2x\right)$$

$$3x-\frac{\pi}{7}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\pi+2x+k\pi \qquad \boldsymbol{x=\frac{17}{70}\pi+k\pi}$$

5. $\frac{\sin x\cos x}{\tan^2 x-1}\le 0$

   Il numeratore è positivo nel momento in cui è positiva la tangente. Basta aggiungere il valore $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ che annulla il numeratore.
   Il denominatore è positivo per: $\tan x<-1 \quad \vee \quad \tan x>1$.
   Rappresentiamo i risultati ottenuti nella circonferenza goniometrica:

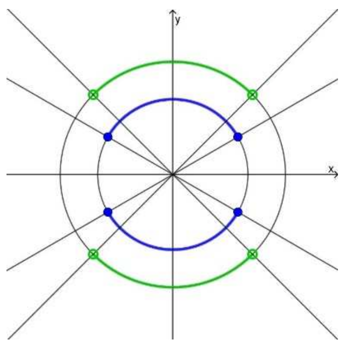


$$\boldsymbol{k\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x=k\pi}$$

6. $\begin{cases}4\cos^2 x-3\le 0\\ \cot^2 x-1<0\end{cases}$

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -1<\cot x<1\end{cases}$$

   Rappresentiamo i risultati ottenuti nella circonferenza goniometrica:



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+k\pi}$$