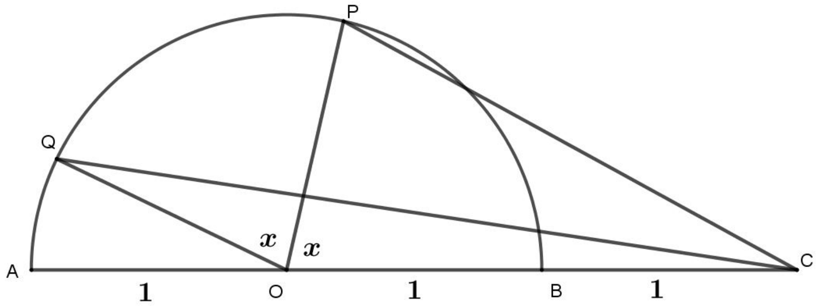
1. Data la semicirconferenza di centro O e raggio unitario, prolunga il diametro AB di un segmento $\overline{BC} = 1$ e congiungi il punto C con i punti P e Q della semicirconferenza tali che $C\hat{O}Q = 2 \cdot C\hat{O}P$. Indicato con x l'angolo $C\hat{O}P$, determina l'espressione della funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{QC}^2 - \overline{PC}^2}{2\,\overline{QP}^2}$$

Per determinare QC e PC, applico il teorema del coseno ai triangoli QOC e OCP:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{OC} \cos x = $$
$$= 1 + 4 - 4\cos x = 5 - 4\cos x$$

$$\overline{QC}^2 = \overline{QO}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{QO} \cdot \overline{OC} \cos 2x = $$
$$= 1 + 4 - 4\cos 2x = 5 - 4\cos 2x$$



Per determinare il segmento QP, applico il teorema della corda, ricordando che l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente e quindi:

$$\overline{QP} = \overline{AB}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$$

Possiamo quindi concludere il percorso:

$$f(x) = \frac{5 - 4\cos 2x - 5 + 4\cos x}{8\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{4\,(-2\cos^2 x + 1 + \cos x)}{8\frac{1-\cos x}{2}} = -\frac{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)}{-(\cos x - 1)} = \boldsymbol{2\cos x + 1}$$

2. Determina graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x + 4k\cos x \sin x - k = 0 \\ 0 < x \leq \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos 2x + 2k\sin 2x - k = 0 \\ 0 < 2x \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Pongo $Y = \sin 2x$ e $X = \cos 2x$:

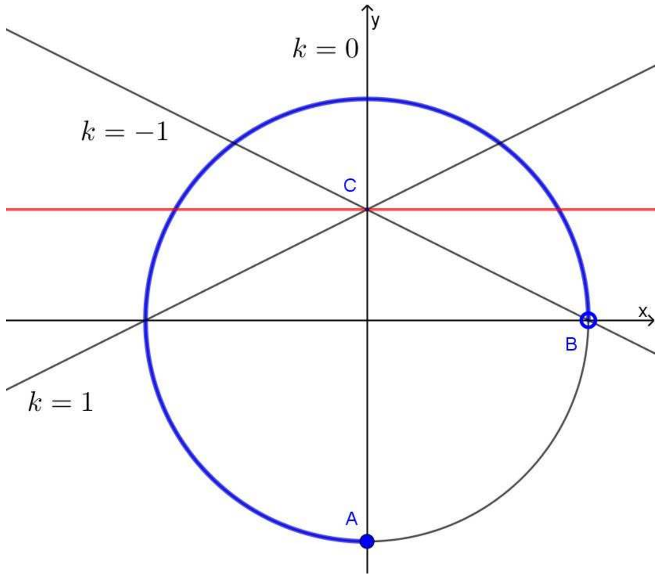
$$\begin{cases} -X + 2kY - k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \leq X < 1; -1 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

Si tratta di un fascio proprio di rette di centro $C\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Secondo le limitazioni, otteniamo l'arco rappresentato in blu, limitato dai punti A e B. Impongo quindi il passaggio del fascio per il punto B, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio. Non ho bisogno di sostituire le coordinate di A, perché la retta del fascio passante per A è una delle generatrici, che otteniamo per $k = 0$:

$B\,(1;0): -1 - k = 0 \qquad k = -1$

Per determinare il verso del fascio, considero che la retta simmetrica all'asse y alla retta passante per B avrà coefficiente angolare opposto, quindi $k = -1$. Possiamo quindi concludere:



$\boldsymbol{1\ sol.: -1 \leq k < 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{2\ sol.: k < -1 \ \vee\ k \geq 0}$