1. Studia le seguenti funzioni e rappresentale nel piano cartesiano:

$$y = \frac{1-\ln x}{\ln x} \qquad\qquad y = x\sqrt{4-x^2}$$

Dominio: $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{D =]0;1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[}$

La funzione non è né pari né dispari, vista l'asimmetria del dominio.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y=\frac{1-\ln x}{\ln x} \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ln x = 1 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=e \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{A\ (e;0)}$

Positività della funzione: $\frac{1-\ln x}{\ln x}>0$ $\quad 0<\ln x<1$ $\quad \boldsymbol{1<x<e}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{1-\ln x}{\ln x} = \lim_{x\to 1^\pm}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right) = \pm\infty \qquad \boldsymbol{x=1\ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right) = -1 \qquad \boldsymbol{y=-1\ asintoto\ orizzontale}$$

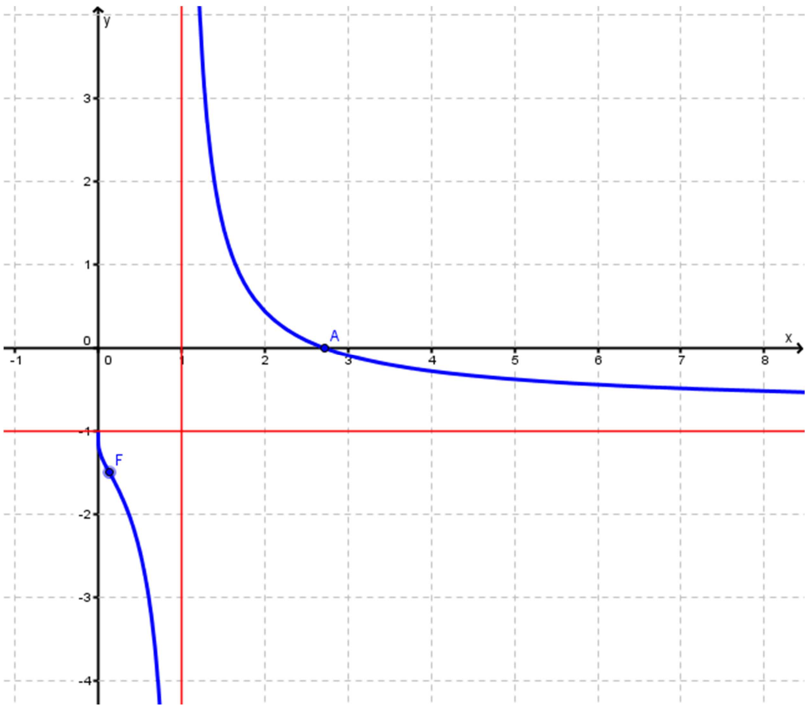
Crescenza/decrescenza:

$$y' = D\,(\ln x)^{-1} = -\frac{1}{x}(\ln x)^{-2} = -\frac{1}{x\ln^2 x} > 0 \qquad \boldsymbol{y'<0\quad \forall x\in D}$$

Concavità:

$$y'' = \frac{\ln^2 x + x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x}{x^2\ln^4 x} = \frac{\ln x + 2}{x^2\ln^3 x} > 0 \qquad \ln\ x<-2\ \vee\ \ln\ x>0 \qquad \boldsymbol{x<\frac{1}{e^2}\ \vee\ x>1}$$

In $x=\frac{1}{e^2}$ abbiamo un punto di flesso di coordinate: $F\ \left(\frac{1}{e^2};\ -\frac{3}{2}\right)$



$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

Dominio: $4 - x^2 \geq 0$ $\quad x^2 - 4 \leq 0$ $\quad \boldsymbol{D = [-2; 2]}$

La funzione è dispari, ovvero simmetrica rispetto all'origine.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = x\sqrt{4-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\sqrt{4-x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{O\ (0; 0)}$ $\quad \boldsymbol{A\ (-2; 0)}$ $\quad \boldsymbol{B\ (2; 0)}$

Inutile determinare le intersezioni con l'asse y, visto che abbiamo già determinato l'unica esistente, ovvero l'origine.

Positività della funzione: $x\sqrt{4-x^2} > 0$ $\quad \boldsymbol{x > 0}$

Non ci sono asintoti.

Crescenza/decrescenza:

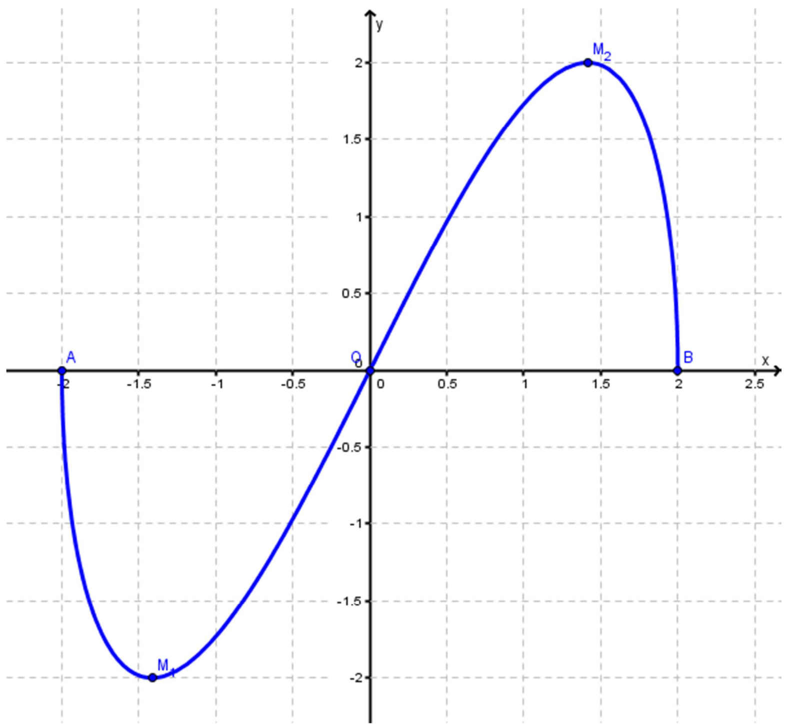
$$y' = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 2\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \qquad \boldsymbol{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$$

La funzione ha un punto di minimo in $\boldsymbol{M_1\ (-\sqrt{2};\ -2)}$ e un punto di massimo in $\boldsymbol{M_2\ (\sqrt{2};\ 2)}$

Concavità:

$$y" = 2\frac{-2x\sqrt{4-x^2} - (2-x^2)\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = -2\frac{8x - 2x^3 - 2x + x^3}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{2x\,(x^2-6)}{\sqrt{(4-x^2)^3}} > 0 \qquad \boldsymbol{-\sqrt{6} < x < 0 \ \vee \ x > \sqrt{6}}$$

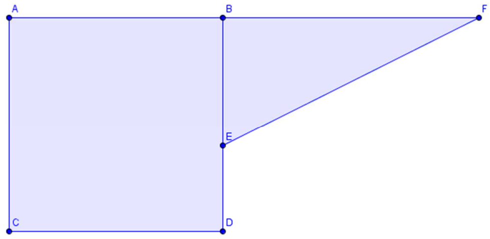
In $x = 0$ abbiamo un punto di flesso di coordinate: $O\ (0;\ 0)$ e per $x > 0$ la concavità è verso il basso, per $x < 0$ è verso l'alto.



2. Su un listello di legno, lungo 10 m, si appendono due cartelloni: uno ha la forma di un quadrato e viene appeso per un lato, l'altro ha la forma di un triangolo rettangolo e viene appeso per il cateto maggiore (il secondo cateto misura la metà di quello appeso). Sapendo che lato e cateto coprono esattamente il listello, trova le loro misure in modo che la somma delle superfici dei due cartelloni risulti minima.

Indico con x il cateto minore del triangolo, perciò $2x$ è il cateto maggiore (quello appoggiato sul listello) e $10-2x$ è il lato del quadrato. Come limitazione, quindi:

$$0 \le 2x \le 10 \qquad ovvero: \qquad 0 \le x \le 5$$



Possiamo quindi determinare la funzione da minimizzare:

$$f(x) = x \cdot \frac{2x}{2} + (10-2x)^2 = x^2 + 100 + 4x^2 - 40x =$$

$$= 5x^2 - 40x + 100$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = 10x - 40 > 0 \qquad x > 4$$

La funzione ha un punto di minimo in $x = 4$, perciò:

$$\boldsymbol{\overline{BF} = 8\,m} \qquad \boldsymbol{\overline{AB} = 2\,m}$$

3. Calcola il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} - \cos x}{e^{\cos x} - e \ln\,(x+e)}$$

Esame di Stato Liceo Scientifico 2008 – sessione straordinaria quesito 10

Possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} - \cos x}{e^{\cos x} - e \ln\,(x+e)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x\, e^{sen\,x} + sen\,x}{-sen\,x\, e^{\cos x} - \dfrac{e}{x+e}} = \boldsymbol{-1}$$

4. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$, si verifichi che esiste un solo punto c interno all'intervallo chiuso $[-1;0]$ tale che la tangente al diagramma in questo punto sia parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

Esame di Stato Liceo Scientifico 2012 – sessione suppletiva quesito 10

Il quesito richiede di trovare un punto che soddisfi il teorema di Lagrange. La funzione è effettivamente continua in $[-1;0]$ e derivabile in $(-1;0)$, perciò le ipotesi sono soddisfatte e vale la tesi, ovvero esiste il punto c richiesto:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{(2c-1)(c-1)-(c^2-c-4)}{(c-1)^2} = \frac{4-\frac{-2}{-2}}{0+1} \qquad \frac{2c^2-2c-c+1-c^2+c+4}{(c-1)^2} = 3$$

$$c^2-2c+5 = 3c^2-6c+3 \qquad c^2-2c-1=0 \qquad c = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Il punto interno all'intervallo è: $\boldsymbol{c = 1-\sqrt{2}}$.

5. Quali punti del grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{x^2}$ hanno distanza minima dall'origine?

Esame di Stato Liceo Scientifico 2009 – sessione straordinaria quesito 10

I punti del grafico hanno coordinate $\left(x; \frac{2}{x^2}\right)$ e la loro distanza dall'origine è data da:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{x^6 + 4}$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = \frac{\frac{6x^5}{2\sqrt{x^6+4}} \cdot x^2 - 2x\sqrt{x^6+4}}{x^4} = \frac{3x^6 - 2x^6 - 8}{x^3\sqrt{x^6+4}} = \frac{x^6 - 8}{x^3\sqrt{x^6+4}} = \frac{\left(x^3 - 2\sqrt{2}\right)\left(x^3 + 2\sqrt{2}\right)}{x^3\sqrt{x^6+4}} > 0$$

La funzione ha due punti di minimo in $x = \pm\sqrt{2}$, perciò:

$$\left(-\sqrt{2}; 1\right) \qquad \left(\sqrt{2}; 1\right)$$

6. Riassumi brevemente le vicende del protagonista di Flatlandia.

Il racconto è diviso in due parti: nella prima parte, il narratore – il Quadrato – descrive Flatlandia, un mondo bidimensionale dove gli abitanti sono figure geometriche. Nella seconda parte, il Quadrato racconta le vicende che l'hanno visto protagonista: alla fine del secondo millennio della storia di Flatlandia, una Sfera appare al Quadrato e gli racconta della terza dimensione. Con una mente ora più aperta, il protagonista va oltre e pensa anche alla quarta dimensione, ma le rigide regole di Flatlandia non gli permettono di diffondere le sue conoscenze: il Quadrato viene incarcerato ed è proprio dal carcere che ci racconta le sue vicende.

7. Satira della società contemporanea che nasconde anche un aspetto scientifico, Flatlandia è qualcosa di più di un semplice "racconto fantastico". Per quali aspetti si configura come una satira? Qual è la portata scientifica del suo contenuto?

La satira della società inglese dell'epoca è resa evidente dalla struttura sociale di Flatlandia, dalla rigida divisione in caste, dall'aspirazione collettiva all'ascesa sociale, dall'assenza della libertà personale e dalla presenza di un'incredibile ristrettezza di vedute, mentre chi cerca di è messo a tacere, imprigionato o ucciso o corrotto con un'ascesa sociale nel momento in cui mostra di poter diventare il capo di una rivolta. Eppure, l'opera ha anche una grande portata scientifica, come si notò quando venne riscoperta dopo gli articoli di Einstein, visti i suoi riferimenti alla quarta dimensione. In altre parole, l'opera di Abbott precorre i tempi, permettendoci di guardare oltre la realtà immanente.