1. Studia le seguenti funzioni e rappresentale nel piano cartesiano:

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} \qquad\qquad y = (x-1)\,e^{3-x}$$

Dominio: $x^2 - 4 > 0$ $\quad x < -2 \ \vee \ x > 2$ $\quad \boldsymbol{D =]-\infty; -2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[}$

La funzione è dispari.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad$ ***non ci sono intersezioni***

Non ci sono intersezioni con l'asse y, che non appartiene al dominio della funzione.

Positività della funzione: $\frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$ $\quad 3x > 0$ $\quad \boldsymbol{x > 0}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = -2 \ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 2 \ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} = \pm 3 \qquad \boldsymbol{y = \pm 3 \ asintoti\ orizzontali}$$

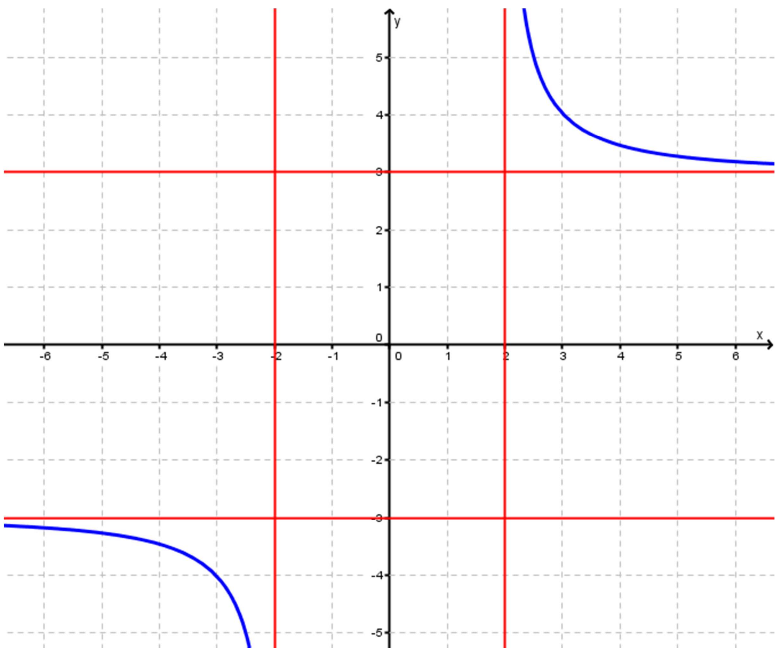
Crescenza/decrescenza:

$$y' = \frac{3\sqrt{x^2-4} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{3x^2 - 12 - 3x^2}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = -\frac{12}{\sqrt{(x^2-4)^3}} > 0 \qquad \boldsymbol{y' < 0 \ \ \forall x \in D}$$

Concavità:

$$y" = -12\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2-4)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{36\,x}{\sqrt{(x^2-4)^5}} > 0 \qquad \boldsymbol{x > 0}$$

Non abbiamo punti di flesso, ma semplicemente concavità verso il basso per $x < -2$ e verso l'alto per $x > 2$.



$$y = (x-1)\,e^{3-x}$$

Dominio: ℝ $\boldsymbol{D = [-\infty; +\infty]}$

La funzione non è né pari né dispari.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = (x-1)\,e^{3-x} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{A\ (1; 0)}$

Intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = (x-1)\,e^{3-x} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -e^3 \end{cases}$ $\boldsymbol{B\ (0; -e^3)}$

Positività della funzione: $(x-1)\,e^{3-x} > 0$ $\boldsymbol{x > 1}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)\,e^{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{x-3}} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0\ asintoto\ orizzontale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)\,e^{3-x} = -\infty \qquad potrebbe\ esistere\ asintoto\ obliquo$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\frac{e^{3-x}}{x} = +\infty \qquad non\ esiste\ asintoto\ obliquo$$

Crescenza/decrescenza:

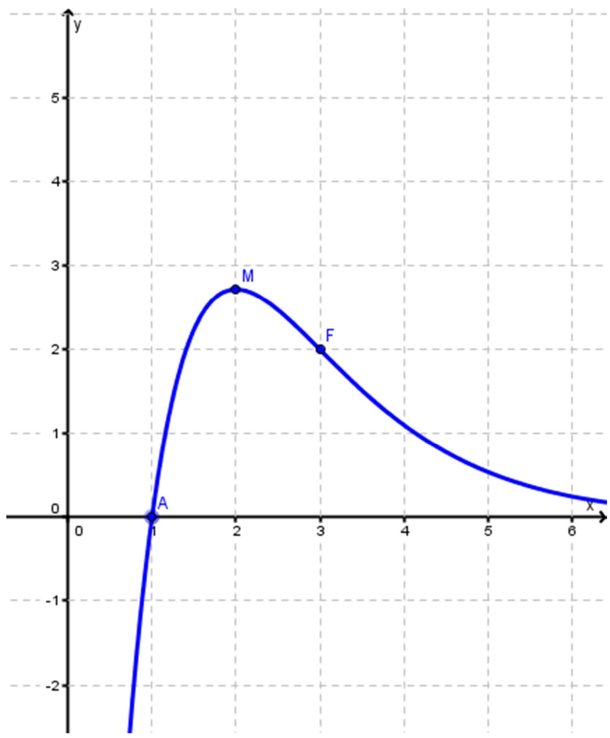
$$y' = e^{3-x} - (x-1)\,e^{3-x} = e^{3-x}\,(2-x) > 0 \qquad \boldsymbol{x < 2}$$

La funzione ha un punto di massimo in $\boldsymbol{M\ (2;\ e)}$

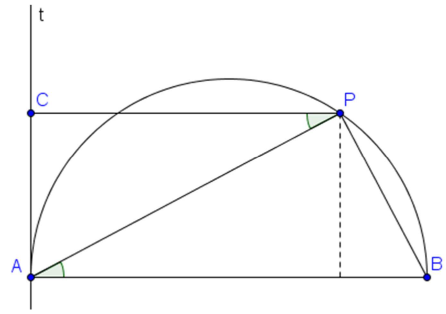
Concavità:

$$y" = -e^{3-x}\,(2-x) - e^{3-x} = e^{3-x}(x-3) > 0 \qquad \boldsymbol{x > 3}$$

In $x = 3$ abbiamo un punto di flesso di coordinate: $F\ (3; 2)$ e per $x > 3$ la concavità è verso il basso, per $x < 3$ è verso l'alto.



2. Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la tangente t in A e, preso sulla semicirconferenza un punto P, indica con C la sua proiezione su t. Trova P in modo che la somma $\overline{PB} + \overline{PC}$ sia massima.



Indico con x l'angolo $B\hat{A}P$:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{PB} = 2r\ sen\ x \qquad \overline{PC} = \overline{PA}\cos x = 2r\cos^2 x$$

Possiamo quindi determinare la funzione da minimizzare:

$$f(x) = 2r\ senx + 2r\cos^2 x$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = 2r\cos x - 4r\cos x\ sen\ x = 2r\cos x\ (1 - 2sen\ x) > 0 \qquad x < \frac{\pi}{6}$$

La funzione ha un punto di massimo in $x = \frac{\pi}{6}$, perciò:

$$\boldsymbol{\overline{PC} = \frac{3}{2}r}$$

3. Calcola il limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2(x-1) - \cos\ (x-1)}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}$$

Possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2(x-1) - \cos\ (x-1)}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{-2\cos\ (x-1)\ sen\ (x-1) + sen\ (x-1)}{4x^3 - 6x^2 - 6x + 8} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2\ sen^2\ (x-1) - 2\cos^2(x-1) + \cos\ (x-1)}{12\ x^2 - 12\ x - 6} = \frac{-2+1}{12-12-6} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

4. Dire qual è il dominio della funzione $f\ (x) = x^\pi - \pi^x$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

Esame di Stato Liceo Scientifico sperimentale 2001 – sessione suppletiva quesito 3

La funzione ha dominio $D =]0;\ +\infty[$, visto che la funzione esponenziale $y = x^\pi$ ha esponente reale. Calcoliamo ora le derivate:

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln \pi \qquad f''(x) = \pi\ (\pi-1)\ x^{\pi-2} - \pi^x \ln^2 \pi$$

Sostituendo $x = \pi$ in entrambi i casi:

$$f'(\pi) = \pi^\pi - \pi^\pi \ln \pi = \pi^\pi (1 - \ln \pi) \boldsymbol{< 0}$$

$$f''(\pi) = \ (\pi-1)\ \pi^{\pi-1} - \pi^\pi \ln^2 \pi = \pi^{\pi-1}\ (\pi - 1 - \pi \ln^2 \pi) \boldsymbol{< 0}$$

5. Individua il punto della retta $2x + y - 5 = 0$ per il quale è minima la distanza dall'origine degli assi cartesiani.

I punti della retta hanno coordinate $(x; -2x + 5)$ e la loro distanza dall'origine è data da:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (-2x + 5)^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2 + 25 - 20\,x} = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = \frac{10\,x - 20}{2\,\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} = \frac{5x - 10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} > 0$$

La funzione ha un punto di minimo in $x = 2$, perciò:

$$\mathbf{(2; 1)}$$

6. Riassumi brevemente le vicende del protagonista di Flatlandia.

Il racconto è diviso in due parti: nella prima parte, il narratore – il Quadrato – descrive Flatlandia, un mondo bidimensionale dove gli abitanti sono figure geometriche. Nella seconda parte, il Quadrato racconta le vicende che l'hanno visto protagonista: alla fine del secondo millennio della storia di Flatlandia, una Sfera appare al Quadrato e gli racconta della terza dimensione. Con una mente ora più aperta, il protagonista va oltre e pensa anche alla quarta dimensione, ma le rigide regole di Flatlandia non gli permettono di diffondere le sue conoscenze: il Quadrato viene incarcerato ed è proprio dal carcere che ci racconta le sue vicende.

7. Descrivi la rigida organizzazione della gerarchi sociale di Flatlandia.

La gerarchia sociale è stabilita proprio dal numero di lati: maggiore è il numero di lati, più alto è il ceto sociale al quale si appartiene. Nel caso dei triangoli, la posizione nella gerarchia è data dalla regolarità: gli isosceli con un angolo al vertice estremamente acuto sono i reietti della società, criminali, soldati e operai, i Triangoli Equilateri sono la Classe Rispettabile dei Commercianti, ovvero la Borghesia; poi ci sono i Quadrati e i Pentagoni, ovvero i Gentiluomini o Professionisti, ed infine l'Aristocrazia, dagli Esagoni fino ai Poligonali. Quando i Poligonali diventano quasi indistinguibili dai Circoli, si entra nell'ordine Circolare o Sacerdotale.
La classe più reietta è quella delle donne, visto che non hanno nemmeno un angolo: sono dei segmenti di retta, che hanno la bocca e l'occhio a un estremo. Siccome viste da dietro sono quasi invisibili, sono costrette per Legge a mantenersi sempre in movimento e ad emettere il loro grido di pace in continuazione.