1. Una carica q è posta tra due piani infiniti di carica, paralleli l'uno all'altro e distanti 10 cm. La densità di carica del primo piano è di $4{,}0\ \mu C/m^2$ e quella del secondo piano è $-2{,}0\ \mu C/m^2$. La carica sperimenta una forza elettrica complessiva di $2{,}5\ mN$. Determina il valore di q.

$$d = 10\ cm \qquad \sigma_1 = 4{,}0\ \mu C/m^2 \qquad \sigma_2 = -2{,}0\ \mu C/m^2 \qquad F = 2{,}5\ mN \qquad q?$$

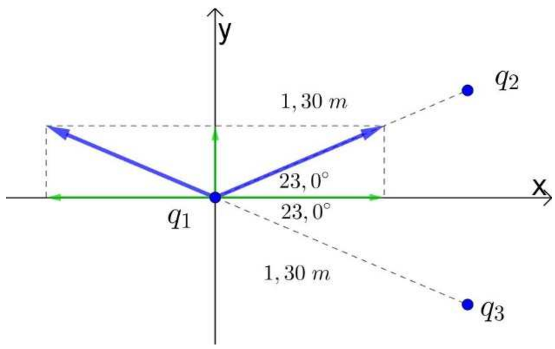
I due piani generano entrambi un campo elettrico uniforme: quello positivo uscente e quello negativo entrante, ma nella zona compresa tra i due piani, i campi elettrici hanno verso concorde (verso il piano caricato negativamente), perciò si sommano. Sappiamo inoltre, per la definizione di campo elettrico, che il campo è dato dal rapporto tra forza elettrica e carica, perciò:

$$F = Eq = \left(\frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_o} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_o}\right)q \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{2\varepsilon_o F}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} = \mathbf{7{,}4\ nC}$$

2. La figura 1 mostra tre cariche puntiformi fisse sul piano. La carica nell'origine degli assi è $q_1 = 8{,}00\ \mu C$; le altre due cariche hanno la stessa grandezza ma segno opposto: $q_2 = -5{,}00\ \mu C$ e $q_3 = 5{,}00\ \mu C$. Calcola la forza totale (intensità, direzione e verso) esercitata su q_1 dalle altre due cariche.

$$q_1 = 8{,}00\ \mu C \qquad q_2 = -5{,}00\ \mu C \qquad q_3 = 5{,}00\ \mu C \qquad d = 1{,}30\ m \qquad F?$$

Come rappresentato nella figura a lato, la forza tra q_1 e q_2 è attrattiva, mentre quella tra q_1 e q_3 è repulsiva. Le due forze hanno la stessa intensità, visto che la distanza di q_1 dalle due cariche è la stessa e visto che $|q_2| = |q_3|$. Scomponendo quindi le due forze lungo gli assi cartesiani, notiamo che esse hanno componente uguale e opposta lungo l'asse x. La risultante della somma delle due forze avrà **direzione e verso uguali a quella dell'asse y**:



$$F_{12_x} = F_{12}\cos 23{,}0° = k_o\frac{|q_1||q_2|}{d^2}\cos 23{,}0°$$
$$F_{13_x} = -F_{13}\cos 23{,}0° = -k_o\frac{|q_1||q_3|}{d^2}\cos 23{,}0°$$

Come già detto: $F_x = F_{12_x} + F_{13_x} = 0$.

$$F_{12_y} = F_{12}\sin 23{,}0° = k_o\frac{|q_1||q_2|}{d^2}\sin 23{,}0° \qquad F_{13_y} = F_{13}\sin 23{,}0° = k_o\frac{|q_1||q_3|}{d^2}\sin 23{,}0°$$

$$F = F_{12_y} + F_{13_y} = 2\,k_o\frac{|q_1||q_2|}{d^2}\sin 23{,}0° = \mathbf{0{,}166\ N}$$

3. Una sferetta di raggio micrometrico e massa $0{,}20\ \mu g$ è stata caricata con una carica positiva q. La sferetta è stata inserita tra due lastre distanti pochi millimetri, tra le quali è presente un campo uniforme di intensità $5{,}0 \cdot 10^6\ N/C$. Tra le lastre non c'è aria e perciò non c'è attrito. Se la lastra positiva è quella in basso, allora la sferetta accelera verso l'alto, con un'accelerazione di $10{,}2\ m/s^2$. Se si invertono le polarità, la sferetta accelera verso il basso, con un'accelerazione di $29{,}8\ m/s^2$. Qual è la carica sulla sferetta?

$$m = 0{,}20\ \mu g \qquad E = 5{,}0 \cdot 10^6\ N/C \qquad a_1 = 10{,}2\ m/s^2 \qquad a_2 = 29{,}8\ m/s^2 \qquad q?$$

Nel momento in cui la lastra positiva è in basso e la sferetta accelera verso l'alto, bisogna considerare che all'accelerazione va aggiunta la forza peso; nel momento in cui la lastra positiva è in alto e la sferetta accelera verso il basso, la seconda accelerazione è il risultato della somma tra l'accelerazione dovuta alla forza elettrica e l'accelerazione di gravità. Otteniamo quindi che l'accelerazione dovuta alla forza elettrica è di $20\ m/s^2$ e da questa possiamo determinare la carica della sferetta, applicando il secondo principio della dinamica:

$$F_e = qE = ma \qquad q = \frac{ma}{E} = \mathbf{8{,}0 \cdot 10^{-16}\ C}$$

4. Due cariche sono poste fra due lamine parallele sulle quali c'è una densità superficiale uguale in valore assoluto, ma di segno opposto. Una carica, sicuramente positiva, è q_1, l'altra è $q_2 = 5{,}00\ \mu C$. La carica per unità di superficie su ciascuna piastra è di $1{,}30 \cdot 10^{-4}\ C/m^2$. La forza che agisce su q_1 causata da q_2 è uguale alla forza che q_1 subisce a causa del campo elettrico tra le due lamine. Qual è la distanza tra le due cariche?

$$q_2 = 5{,}00\ \mu C \qquad \sigma = 1{,}30 \cdot 10^{-4}\ C/m^2 \qquad F_e = F_{1,2} \qquad r?$$

La lamina positiva genera un campo elettrico uniforme uscente di intensità $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$; la lamina negativa genera un campo elettrico uniforme entrante di intensità $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$. Fra le due lamine c'è un campo elettrico totale pari a $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$, dato dalla somma dei due campi elettrici, che sono paralleli ed equiversi. La forza dovuta al campo elettrico è dovuta quindi al prodotto tra la carica q_1 e il campo elettrico e dobbiamo uguagliarla alla forza di Coulomb agente tra le due cariche:

$$q_1 \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_2}{\pi\sigma}} = \mathbf{5{,}53 \cdot 10^{-2}\ m}$$

5. Un elettrone inizialmente fermo è lasciato libero sulla lamina negativa, tra due piani infiniti caricati con segno opposto, distanti $1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m$ e la cui carica per unità di superficie è $1{,}8 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$. Qual è la velocità dell'elettrone un istante prima di raggiungere la lamina positiva, se agisce solo la forza elettrica?

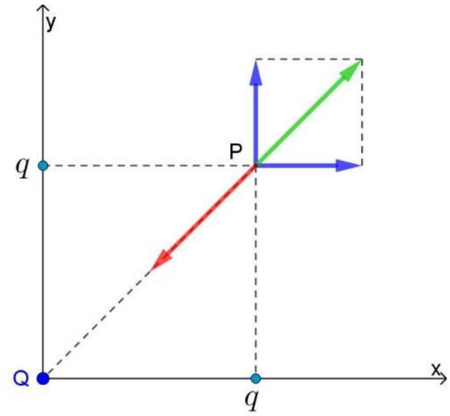
$$d = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m \qquad \sigma = 1{,}8 \cdot 10^{-7}\ C/m^2 \qquad v_o = 0\ m/s \qquad v?$$

La lamina positiva genera un campo elettrico uniforme uscente di intensità $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$; la lamina negativa genera un campo elettrico uniforme entrante di intensità $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$. Fra le due lamine c'è un campo elettrico totale pari a $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$, dato dalla somma dei due campi elettrici, che sono paralleli ed equiversi. La forza dovuta al campo elettrico è dovuta quindi al prodotto tra la carica dell'elettrone e il campo elettrico, ma, per il secondo principio della dinamica, è uguale anche al prodotto tra massa dell'elettrone e accelerazione. Da questa uguaglianza ricaviamo quindi il modulo dell'accelerazione e, siccome per la cinematica $a = \frac{v^2 - v_o^2}{2d}$, possiamo ricavare la velocità finale:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}|e^-| \\ a = \dfrac{v^2}{2d} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}|e^-| = ma \\ a = \dfrac{v^2}{2d} \end{cases} \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon_o}|e^-| = m\frac{v^2}{2d} \qquad v = \sqrt{2d\,\frac{\sigma}{m\varepsilon_o}|e^-|} = \mathbf{1{,}0 \cdot 10^7\ m/s}$$

6. È data la configurazione di cariche illustrata in figura 2 (con le due cariche uguali positive). Dopo aver eseguito una rappresentazione in scala dei campi elettrici nel punto P, determina il segno ed il valore di Q affinché sia nullo il campo elettrico risultante nel punto P.

Nel punto P, c'è il campo elettrico parallelo all'asse y e rivolto verso l'alto dovuto alla carica q posta sull'asse x e il campo elettrico parallelo all'asse x e rivolto nella sua direzione positiva dovuto alla carica q posta sull'asse y. I due campi elettrici sono uguali, visto che le due cariche sorgenti sono uguali e poste alla stessa distanza da P. Pertanto, il campo elettrico risultante (indicato in verde nel grafico) è diretto lungo la diagonale del quadrato che ha per lati i due vettori campo elettrico. Perché sia nullo il campo elettrico totale, il campo elettrico dovuto a Q deve essere diretto lungo la congiungente PQ verso Q (come indicato dal vettore rosso nel grafico) e quindi la carica Q deve essere **negativa**. Possiamo quindi determinarne il modulo, che sarà uguale alla risultante dei due campi elettrici dovuti alle due cariche q:



$$E = \sqrt{\left(k_o \frac{q}{l^2}\right)^2 + \left(k_o \frac{q}{l^2}\right)^2} = k_o \frac{q}{l^2}\sqrt{2}$$

Perciò: $k_o \frac{q}{l^2}\sqrt{2} = k_o \frac{|Q|}{(l\sqrt{2})^2}$ e possiamo procedere a determinare Q:

$$Q = \mathbf{-2\sqrt{2}\,q}$$