1. Un lanciatore del disco parte da fermo e comincia a ruotare con un'accelerazione angolare costante di 2,2 rad/s^2. Quanti giri sono necessari perché la velocità angolare del lanciatore raggiunga i 6,3 rad/s? Quanto tempo ci vuole?

$$\alpha = 2{,}2\, rad/s^2 \qquad \omega_o = 0 \qquad \omega = 6{,}3\, rad/s \qquad n? \qquad t?$$

Il numero di giri è dato dall'angolo descritto – misurato in radianti – diviso 2π, ovvero il valore in radianti di un angolo giro:

$$n = \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\alpha} = \mathbf{1,4\ giri}$$

Dalla definizione di accelerazione angolare, ricaviamo il tempo:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \mathbf{2,9\ s}$$

2. Un'asta di massa 1,4 kg è lunga 1,8 m. Calcola la sua energia cinetica se ruota a 2,2 rad/s:
   A. attorno al suo centro di massa;
   B. attorno a un suo estremo.

$$m = 1{,}4\, kg \qquad L = 1{,}8\, m \qquad \omega = 2{,}2\, rad/s \qquad K_r = ?$$

Le cose cambiano, in termini di momento d'inerzia, se l'asta ruota attorno al suo centro di massa o attorno al suo estremo:

A. $K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m L^2 \omega^2 = \mathbf{0,91\ J}$

B. $K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 = \mathbf{3,7\ J}$

3. Un piccolo blocco di massa 0,0250 kg si muove su una superficie orizzontale priva di attrito. Esso è attaccato a un filo privo di massa che passa attraverso un foro praticato nella superficie. Il blocco inizialmente ruota a una distanza di 0,300 m con una velocità angolare di 1,75 rad/s. Il filo è successivamente tirato verso il basso, accorciando il raggio della circonferenza lungo la quale il blocco si muove a 0,150 m. Tratta il blocco come se fosse una particella e rispondi alle domande:
   A. Il momento angolare si conserva? Perché?
   B. Quanto vale la nuova velocità angolare?
   C. Calcola la variazione dell'energia cinetica del blocco.
   D. Quanto lavoro viene fatto tirando la corda?

$$m = 0{,}0250\, kg \qquad r_1 = 0{,}300\, m \qquad \omega_1 = 1{,}75\, rad/s \qquad r_2 = 0{,}150\, m \qquad \omega_2 = ? \qquad \Delta K = ? \qquad L = ?$$

A. Il momento angolare si conserva, perché è una forza centrale.

B. $L_1 = L_2 \qquad \Rightarrow \qquad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\, \omega_1 = \frac{m r_1^2}{m r_2^2} \omega_1 = \mathbf{7,00\ rad/s}$

C. $\Delta K = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \mathbf{1,03 \cdot 10^{-2}\ J}$

D. $L = \Delta K = \mathbf{1,03 \cdot 10^{-2}\ J}$

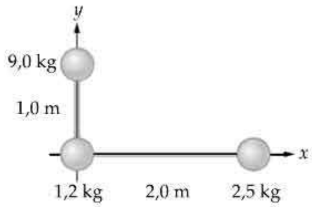
4. L'oggetto a forma di L disegnato in figura è formato da tre masse collegate tra loro da bastoncini leggeri. Indica quale momento torcente devi applicare a questo oggetto per dargli un'accelerazione angolare di 1,20 rad/s² se esso ruota:
   A. attorno all'asse x;
   B. attorno all'asse y;
   C. attorno all'asse z che passa per l'origine ed è perpendicolare al piano della pagina.

$$\alpha = 1{,}20\ rad/s^2 \qquad m_1 = 9{,}0\ kg \qquad r_1 = 1{,}0\ m \qquad m_3 = 2{,}5\ kg \qquad r_3 = 2{,}0\ m$$

A. $M_x = m_1 r_1^2 \alpha = \mathbf{11\ Nm}$

B. $M_y = m_3 r_3^2 \alpha = \mathbf{12\ Nm}$

C. $M_z = m_1 r_1^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha = \mathbf{23\ Nm}$



5. Europa è un satellite di Giove (massa $1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$) che si muove su un'orbita di raggio $6{,}7 \cdot 10^5\ km$. Calcola il periodo orbitale di Europa.

$$M = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg \qquad r = 6{,}7 \cdot 10^5\ km \qquad T = ?$$

La forza di attrazione gravitazionale di Europa verso Giove è la forza centripeta che obbliga Europa a orbitare attorno a Giove, perciò:

$$F_c = F_G \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M}{r}$$

Ricordando che in un moto circolare uniforme $v = \frac{2\pi r}{T}$:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \mathbf{3{,}1 \cdot 10^5\ s}$$

6. Giove ha una massa di $1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$, dista $7{,}8 \cdot 10^{11}\ m$ dal Sole e orbita muovendosi a $13\ km/s$. Qual è il suo momento angolare rispetto al Sole?

$$M = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg \qquad r = 7{,}8 \cdot 10^{11}\ m \qquad v = 13\ km/s \qquad L = ?$$

Consideriamo Giove come una massa puntiforme, perciò il momento angolare è:

$$L = Mrv = \mathbf{1{,}9 \cdot 10^{43}\ kg\ m^2/s}$$

7. Un cilindro avente un momento d'inerzia pari a $14\ kg\ m^2$ ruota alla velocità di 12 rad/s. Determina l'energia cinetica del cilindro.

$$I = 14\ kg\ m^2 \qquad \omega = 12\ rad/s \qquad K = ?$$

Per la definizione di energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \mathbf{1{,}0 \cdot 10^3\ J}$$

8. Una sonda spaziale con massa di 100 kg ha un'energia potenziale di $-6{,}0 \cdot 10^7\ J$. A quale distanza dal centro della Terra si trova la sonda spaziale?

$$m = 100\ kg \qquad U = -6{,}0 \cdot 10^7\ J \qquad r = ?$$

Per la definizione di energia potenziale gravitazionale:

$$U = -G\frac{mM}{r} \quad \Rightarrow \quad r = -G\frac{mM}{U} = \mathbf{6,6 \cdot 10^8\ m}$$

9. I pianeti Marte $(6{,}42 \cdot 10^{23}\ kg)$ e Saturno $(5{,}69 \cdot 10^{26}\ kg)$ si trovano alla distanza di 8 UA. Un meteorite si trova sulla congiungente Marte-Saturno. Trascura le forze gravitazionali dovute agli altri corpi del Sistema Solare. A quale distanza da Marte il meteorite ha un'accelerazione gravitazionale nulla?

$$m_M = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ kg \qquad m_S = 5{,}69 \cdot 10^{26}\ kg \qquad d = 8\ UA \qquad x = ?$$

Indichiamo con x la distanza del meteorite da Marte. Perché l'accelerazione del meteorite sia nulla, vuol dire che su esso agisce una forza nulla, ovvero che la somma delle forze gravitazionali dovute a Marte e Saturno è nulla, che equivale a dire che le due forze gravitazionali per effetto dei due pianeti sono uguali:

$$G\frac{mm_M}{x^2} = G\frac{mm_S}{(d-x)^2}$$

dove ho indicato con d la distanza media tra Marte e Saturno. Dall'equazione precedente, posso determinare il valore di x:

$$\frac{m_M}{x^2} = \frac{m_S}{(d-x)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{m_S}{m_M} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{m_S}{m_M}}$$

Ho scelto il valore positivo in quanto d > x e, quindi, a primo membro ho una quantità sicuramente positiva:

$$\frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\frac{m_S}{m_M}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{x} = 1 + \sqrt{\frac{m_S}{m_M}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_S}{m_M}}} = \mathbf{0,3\ UA}$$