1. Un cubetto di ghiaccio (densità $917\ kg/m^3$) ha una massa di $3{,}1\ g$ e il suo spigolo misura $1{,}5\ cm$. Il cubetto viene messo nell'acqua (densità $1000\ kg/m^3$). Calcola l'altezza della parte immersa del cubetto.

$$m = 3{,}1 \cdot 10^{-3}\ kg \qquad L = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m \qquad d = 1000\ kg/m^3 \qquad h?$$

Nella condizione di equilibrio descritta, il peso del cubetto è pari alla forza di Archimede, $P = F_A$, dove la forza di Archimede è pari al peso del fluido spostato, che ha un volume pari al volume della parte immersa del cubetto, dato dall'area della faccia del cubetto moltiplicata per l'altezza della parte immersa:

$$F_A = dV_i g = dL^2hg \quad \Rightarrow \quad mg = dL^2hg \quad \Rightarrow \quad m = dL^2h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m}{d\,L^2} = \mathbf{1{,}4\ cm}$$

2. Una sfera ha una massa di $85\ kg$. Quando è completamente immersa in acqua di mare (densità $1025\ kg/m^3$), il suo peso, misurato con un dinamometro, appare diminuito del 18%. Determina il raggio della sfera.

$$m = 85\ kg \qquad d = 1025\ kg/m^3 \qquad P_A = \frac{82}{100}P \qquad r?$$

Nel momento in cui la sfera è completamente immersa, il peso apparente (cioè il peso misurato con il dinamometro) è dato dalla differenza tra il peso reale della sfera e la forza di Archimede:

$$P_A = P - F_A \quad \Rightarrow \quad \frac{82}{100}P = P - F_A \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{18}{100}P$$

Sostituendo le espressioni delle due forze, $F_A = dVg$, dove V è il volume della sfera (dato da $V = \frac{4}{3}\pi r^3$), e $P = mg$, ottengo:

$$dVg = \frac{18}{100}mg \quad \Rightarrow \quad V = \frac{18\,m}{100\,d} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{18\,m}{100\,d} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{18\,m}{100\,d}\cdot\frac{3}{4\,\pi}} = \mathbf{15\ cm}$$

3. Un sommergibile si trova a una profondità di $250\ m$ sotto il livello del mare (densità $1025\ kg/m^3$). Determina la forza che agisce su un oblò di raggio $12\ cm$ del sommergibile.

$$h = 250\ m \qquad d = 1025\ kg/m^3 \qquad p_o = 1{,}01 \cdot 10^5\ Pa \qquad r = 12 \cdot 10^{-2}\ m \qquad F?$$

Sull'oblò del sommergibile agisce la pressione data dalla profondità (legge di Stevino: $p = dgh$) alla quale si aggiunge la pressione atmosferica:

$$p = p_o + dgh$$

Sapendo che la pressione, per definizione, è data dal rapporto tra forza e superficie, $p = \frac{F}{A}$ e che la superficie dell'oblò, trattandosi di un cerchio, è data da: $A = \pi r^2$, si ottiene:

$$p = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad F = pA = (p_o + dgh)\cdot \pi r^2 = \mathbf{1{,}2 \cdot 10^5\ N}$$

4. Due blocchi A e B di forma cubica e dello stesso peso sono appoggiati al suolo. Il lato di A è lungo $7{,}5\ cm$. La pressione esercitata dal blocco B sul suolo supera del 12% la pressione esercitata dal blocco A. Determina la differenza tra il lato di A e il lato di B.

$$L_A = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\ m \qquad P_A = P_B \qquad p_B = \frac{112}{100}p_A \qquad L_A - L_B?$$

La pressione è data dal rapporto tra la forza perpendicolare al piano di appoggio e la superficie. In questo caso, la forza che esercita la pressione è data dalla forza peso, perciò la relazione tra le due pressioni diventa:

$$\frac{P_B}{L_B^2} = \frac{112}{100}\cdot\frac{P_A}{L_A^2}$$

Dato che i due pesi sono uguali, la relazione coinvolge solo la lunghezza degli spigoli dei cubi:

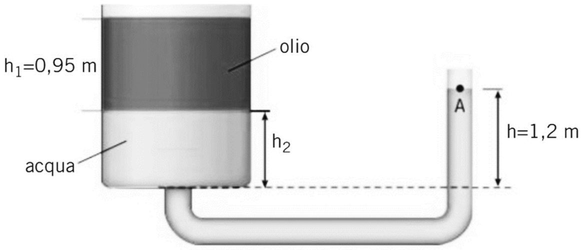
$$\frac{1}{L_B^2} = \frac{112}{100\,L_A^2} \quad \Rightarrow \quad L_B = \frac{10L_A}{\sqrt{112}}$$

A questo punto ci sono gli elementi per determinare la differenza richiesta:

$$L_A - L_B = L_A - \frac{10L_A}{\sqrt{112}} = \mathbf{0{,}41\ cm}$$

5. Un recipiente viene riempito con una miscela di acqua (densità $1000\ kg/m^3$) e di olio (densità $800\ kg/m^3$). Il recipiente è collegato a un tubo a U. Il recipiente ha l'estremità superiore aperta e l'olio è a contatto con l'aria. Il tubo a U ha la sua estremità superiore destra sigillata. La pressione nel punto A è $1{,}0145 \cdot 10^5\ Pa$. Calcola l'altezza h_2 della colonna di acqua nel recipiente.

$$d = 1000\ kgm^3 \qquad d_o = 800\ kg/m^3 \qquad p_A = 1{,}0145 \cdot 10^5\ Pa \qquad p_o = 1{,}01 \cdot 10^5\ Pa \qquad h_2?$$



La condizione di equilibrio è data dall'uguaglianza tra le due pressioni, misurate all'altezza della linea tratteggiata nel disegno. Da un lato, ho la pressione nel punto A alla quale si aggiunge la pressione data dalla colonna di acqua di altezza h, dall'altro ho la pressione atmosferica, sommata alla pressione dell'olio e alla pressione dell'acqua. Tutte le pressioni sono date usando la legge di Stevino:

$$p_A + dgh = p_o + d_o g h_1 + dgh_2$$

Dalla relazione data, posso ricavare la misura dell'altezza richiesta:

$$dgh_2 = p_A + dgh - p_o - d_o g h_1 \qquad \Rightarrow \qquad h_2 = \frac{p_A + dgh - p_o - d_o g h_1}{dg} = \mathbf{0{,}49\ m}$$

6. In un torchio idraulico, le superfici del primo e del secondo pistone hanno area, rispettivamente, $4{,}0\ cm^2$ e $20\ cm^2$. L'applicazione di una forza $\vec{F}_1$ sul primo pistone produce una forza $\vec{F}_2$ sul secondo pistone. Quando il modulo della prima forza aumenta del 20%, il modulo della seconda forza aumenta di $120\ N$. Calcola il modulo della forza $\vec{F}_1$.

$$A_1 = 4{,}0\ cm^2 \qquad A_2 = 20\ cm^2 \qquad F_1' = \frac{120}{100} F_1 \qquad F_2' = F_2 + 120\ N \qquad F_1?$$

In condizioni di equilibrio, le pressioni esercitate sui due pistoni sono uguali, cioè: $p_1 = p_2$

Dalla definizione di pressione, ottengo: $\dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 \dfrac{A_1}{A_2}$

Dato che le forze sono direttamente proporzionali, e dato che la prima forza subisce un aumento del 20%, anche la seconda forza subisce lo stesso aumento, perciò: $F_2' = \dfrac{120}{100} F_2$

Ma, dai dati, so che $F_2' = F_2 + 120\ N$, perciò: $F_2 + 120\ N = \dfrac{120}{100} F_2$

$$\frac{120}{100} F_2 - F_2 = 120\ N \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{100} F_2 = 120\ N \quad \Rightarrow \quad F_2 = 600\ N$$

A questo punto, è facile ottenere il modulo richiesto: $F_1 = F_2 \dfrac{A_1}{A_2} = \mathbf{120\ N}$