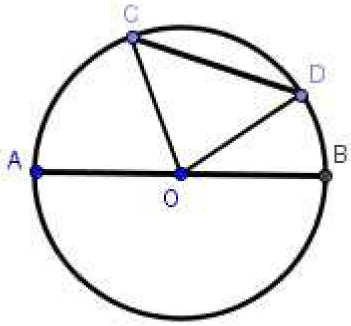
1. Dimostra che in ogni circonferenza il diametro è maggiore di ogni altra corda.



Hp:
$\mathcal{C}, O, r$
$A, B, C, D \in \mathcal{C}$
A, O, B *allineati*

Tesi:
$AB > CD$

Dimostrazione: Congiungo C con O e D con O. Considero il triangolo COD, per il quale vale la disuguaglianza:

$$CD < CO + OD$$

Ma CO e OD sono raggi della circonferenza, perciò $CO + OD = AB$ e, di conseguenza: $CD < AB \quad \Longrightarrow \quad AB > CD$.

C.v.d.

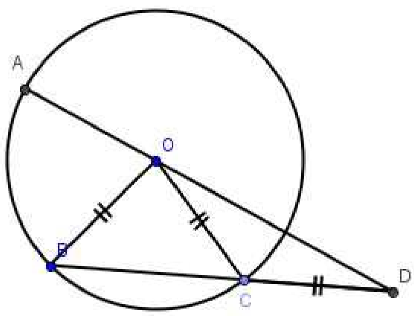
2. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

	V	F
Tutti i punti di un arco AB di una circonferenza hanno uguale distanza dal centro	☑	☐
Tutti i punti di un raggio di una circonferenza appartengono alla circonferenza stessa	☐	☑
In una circonferenza tutte le corde hanno stessa distanza dal centro	☐	☑
La proiezione del centro di una circonferenza su una qualsiasi corda divide a metà la corda stessa	☑	☐
In una circonferenza esiste un solo diametro perpendicolare a una corda data	☑	☐
Per avere la stessa posizione (esterna, interna o tangente) a una circonferenza, due rette devono avere la stessa distanza dal centro	☐	☑
Per ogni punto della circonferenza passa una sola retta tangente	☑	☐
Se una retta taglia a metà una circonferenza, allora la sua parte interna al cerchio è un diametro	☑	☐
Se un punto è esterno a una circonferenza, è sempre possibile condurre dal punto due rette tangenti alla circonferenza	☑	☐
Per due punti del piano passano infinite circonferenze	☑	☐
Se due circonferenze non hanno punti in comune, allora sono una interna all'altra	☐	☑
Se la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla somma dei raggi, le circonferenze di tali cerchi sono tangenti esternamente	☑	☐
Due circonferenze concentriche possono essere esterne	☐	☑
Per ogni punto esterno a due circonferenze fra loro esterne passano sempre quattro rette distinte tangenti a una o all'altra circonferenza	☑	☐
Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza è retto	☑	☐
Per ogni arco esiste un solo angolo alla circonferenza corrispondente	☐	☑
Unendo ordinatamente n punti qualsiasi presi su una circonferenza, si ottiene un poligono di n lati inscritto in tale circonferenza	☑	☐
Qualsiasi poligono è inscrivibile in una opportuna circonferenza	☐	☑
I punti di contatto di quattro rette tangenti a una stessa circonferenza determinano un poligono inscritto nella circonferenza stessa	☐	☑
Il punto di incontro degli assi di un triangolo si chiama circocentro perché è il centro del cerchio circoscritto	☑	☐
L'incentro di un triangolo è equidistante dai lati del triangolo stesso	☑	☐
Se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora la somma degli angoli opposti è congruente a un angolo piatto	☑	☐
È sempre possibile inscrivere un rombo in una circonferenza	☐	☑
L'apotema di un triangolo equilatero è congruente a un terzo di una delle mediane	☑	☐
Esiste sempre una circonferenza inscritta in un rettangolo	☐	☑

3. Enuncia il teorema delle tangenti.

I segmenti di tangente, condotti da un punto esterno a una circonferenza e compresi tra tale punto e quelli di contatto, sono congruenti. La semiretta che congiunge il punto da cui escono le tangenti con il centro della circonferenza è bisettrice sia dell'angolo delle tangenti, sia dell'angolo formato dai raggi che vanno ai punti di contatto ed è inoltre asse del segmento che unisce i punti di contatto.

4. In una circonferenza di centro O prolunga una corda BC di un segmento CD congruente al raggio. Congiungi D con O e prolunga tale segmento fino a incontrare in A la circonferenza. Dimostra che l'angolo AOB è il triplo dell'angolo COD.



Hp:
$\mathcal{C}, O, r$
$B, C \in \mathcal{C}$
$B, C, D\ allineati$
$CD \cong r$
$D, O, A\ allineati$
$A \in \mathcal{C}$

Tesi:
$C\hat{O}D \cong \frac{1}{3} A\hat{O}B$

Dimostrazione:

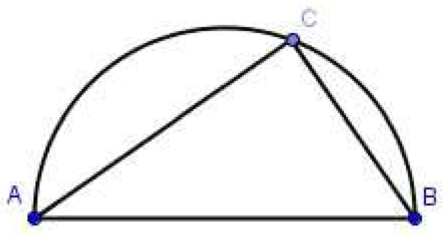
$C\hat{O}D + A\hat{O}B \cong \pi - B\hat{O}C$ perché i tre angoli sono supplementari dato che, per ipotesi, D, O e A sono allineati. (1)
$B\hat{O}C \cong \pi - O\hat{B}C - O\hat{C}B$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.
Ma $O\hat{B}C \cong O\hat{C}B$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele, OBC, isoscele perché i lati OB e OC sono raggi della circonferenza.
Perciò: $B\hat{O}C \cong \pi - 2\, O\hat{C}B$.
Sostituendolo nella relazione (1): $C\hat{O}D + A\hat{O}B \cong \pi - B\hat{O}C \cong \pi - \pi + 2\, O\hat{C}B \cong 2\, O\hat{C}B$. (2)
Per il secondo teorema dell'angolo esterno, dove $O\hat{C}B$ è l'angolo esterno del triangolo CDO, abbiamo: $O\hat{C}B \cong C\hat{O}D + C\hat{D}O$.
Ma $C\hat{O}D \cong C\hat{D}O$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele, CDO, isoscele perché i lati OC e CD sono congruenti.
Perciò: $O\hat{C}B \cong 2\, C\hat{O}D$.
Sostituendo nella relazione (2): $C\hat{O}D + A\hat{O}B \cong 2\, O\hat{C}B \cong 2 \cdot 2\, C\hat{O}D = 4\, C\hat{O}D$.
Ovvero: $C\hat{O}D + A\hat{O}B \cong 4\, C\hat{O}D \quad \Longrightarrow \quad A\hat{O}B \cong 3\, C\hat{O}D$.

C.V.D.

5. Nella semicirconferenza di diametro AB è inscritto il triangolo ABC del quale si conosce che:

$$BC \cong \frac{3}{4}AC \qquad e \qquad \frac{AC}{6} - \frac{CB}{12} = 5\ cm$$

Determina il diametro AB, il perimetro e l'area del triangolo ABC.



Dimostrazione: Indico con x il lato AC, perciò $BC \cong \frac{3}{4}x$ e, sostituendo nella seconda relazione, ottengo l'equazione di primo grado:

$$\frac{x}{6} - \frac{\frac{3}{4}x}{12} = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{6} - \frac{x}{16} = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{8-3}{48}x = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 48$$

Perciò ecco le misure dei due lati AC e BC:

$$BC = 36\ cm \qquad AC = 48\ cm$$

Posso ricavare il diametro della circonferenza, ovvero il lato AB, usando il teorema di Pitagora: infatti, il triangolo è inscritto in una semicirconferenza, perciò è un triangolo rettangolo in C:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \mathbf{60\ cm}$$

Posso determinare perimetro e area del triangolo:

$$2p = AB + AC + BC = \mathbf{144\ cm}$$

$$A = \frac{AC \cdot BC}{2} = \mathbf{864\ cm^2}$$