1. $(a+y-2)(a+y+2)-(a+y)^2+(a+3)^2-(6+a)(a-6)-(1-a)^2+a\,(a-8)$

$=(a+y)^2-4-(a+y)^2+a^2+6a+9-(a^2-36)-(1-2a+a^2\,)+a^2-8a=$

$=-4+a^2+6a+9-a^2+36-1+2a-a^2+a^2-8a=\mathbf{40}$

2. $[x^2-(x-y)(x+y)+y^3]^3-(1+y)^3[(y^3+1)(y^3-1)+(y^2+x^2)^0]$ $\qquad con\ x\neq 0\ o\ y\neq 0$

$=[x^2-(x^2-y^2)+y^3]^3-(1+y)^3(y^6-1+1)=$

$=(x^2-x^2+y^2+y^3)^3-y^6(1+3y+3y^2+y^3)=$

$=y^6+3y^7+3y^8+y^9-y^6-3y^7-3y^8-y^9=\mathbf{0}$

3. $\left(\frac{1}{2}a+ab\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2-a^2[(b+1)^2-(b+1)]+\frac{2}{3}a\,[b\,(a+b)(a-b)+b^3]$

$=\frac{1}{4}a^2+a^2b+a^2b^2-\frac{1}{4}a^2-a^2(b^2+2b+1-b-1)+\frac{2}{3}a\,[b\,(a^2-b^2)+b^3]=$

$=a^2b+a^2b^2-a^2(b^2+b)+\frac{2}{3}a(a^2b-b^3+b^3)=$

$=a^2b+a^2b^2-a^2b^2-a^2b+\frac{2}{3}a^3b=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3b}$

4. $4a^2+(2ax+3a^3)^2+4a^2\left(x-\frac{1}{2}a+1\right)\left(\frac{1}{2}a+x-1\right)-3x\,(-2a^2)^2-a^4(3a-1)(3a+1)-4a^2(2x^2+a)$

$=4a^2+4a^2x^2+12\,a^4x+9a^6+4a^2\left[x^2-\left(\frac{1}{4}a^2-a+1\right)\right]-3x\,(4a^4)-a^4(9a^2-1)-8a^2x^2-4a^3=$

$=4a^2-4a^2x^2-4a^3+12a^4x+9a^6+4a^2\left(x^2-\frac{1}{4}a^2+a-1\right)-12\,a^4x-9a^6+a^4=$

$=4a^2-4a^2x^2-4a^3+a^4+4a^2x^2-a^4+4a^3-4a^2=\mathbf{0}$

5. Completa, in modo che l'uguaglianza risulti sempre vera:

$4-y^2+\boldsymbol{\frac{1}{16}y^4}=\left(\boldsymbol{2-\frac{1}{4}y^2}\right)^2$ $\qquad (\mathbf{5x}+1)^2=25\,x^2+\mathbf{10x+1}$

$\left(-2a-\boldsymbol{\frac{4}{5}b}\right)^2=\frac{16}{5}ab+\mathbf{4a^2}+\boldsymbol{\frac{16}{25}b^2}$ $\qquad \left(\mathbf{5ab}-\frac{1}{4}b\right)^2=-\frac{5}{2}ab^2+\mathbf{25a^2b^2}+\boldsymbol{\frac{1}{16}b^2}$

$\left(\frac{1}{3}a+\mathbf{b}\right)^3=\frac{1}{3}a^2b+\boldsymbol{\frac{1}{27}a^3}+\mathbf{ab^2}+\mathbf{b^3}$ $\qquad \left(2-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\frac{1}{2}y}\right)\left(2-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\frac{1}{2}y}\right)=4-4x+x^2-\frac{1}{4}y^2$

Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni, applicando l'algoritmo più adeguato:

6. $(3x^4 + 12x - 5 - 14x^2) : (x^2 - 2x)$

   Applico l'algoritmo generale di divisione tra polinomi:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
3\,x^4 & & -14\,x^2 & 12\,x & -5 & x^2-2x \\ \cline{6-6}
-3\,x^4 & 6\,x^3 & & & & 3x^2+6x-2 \\ \cline{1-5}
 & 6\,x^3 & -14\,x^2 & 12\,x & -5 & \\
 & -6\,x^3 & 12\,x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & -2\,x^2 & 12\,x & -5 & \\
 & & 2\,x^2 & -4x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8\,x & -5 &
\end{array}
$$

$\boldsymbol{Q = 3x^2 + 6x - 2}$ $\boldsymbol{R = 8x - 5}$

7. $(5x^3 - 2 - 3x^2 + 4x) : (2x - 1)$

   Applico la proprietà invariantiva, dividendo sia dividendo che divisore per 2 e poi posso svolgere la divisione usando la regola di Ruffini:

$\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\
\frac{1}{2} & & \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{15}{16} \\ \hline
 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{15}{8} & -\frac{1}{16}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{Q = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}}$ $\boldsymbol{R = -\frac{1}{8}}$

8. Calcola le seguenti potenze di binomio:

$$(a + 2b)^6 \qquad (x - y)^5$$

Per lo sviluppo del triangolo di Tartaglia, otteniamo:

$(a + 2b)^6 = a^6 + 6a^5(2b) + 15a^4(2b)^2 + 20a^3(2b)^3 + 15a^2(2b)^4 + 6a(2b)^5 + (2b)^6 =$

$= \boldsymbol{a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6}$

$(x - y)^5 = x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 5x(-y)^4 + (-y)^5 =$

$= \boldsymbol{x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5}$

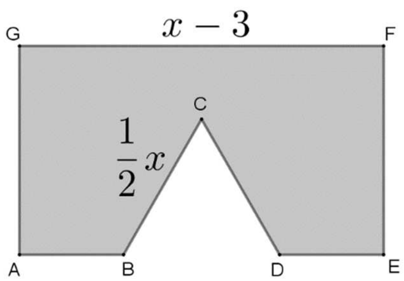
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

9. Esegui i seguenti calcoli usando i prodotti notevoli:

$$31^2 + 29^2 = (30+1)^2 + (30-1)^2 = 900 + 60 + 1 + 900 - 60 + 1 = \mathbf{1802}$$

$$\frac{(2^8 - 2^7)^2}{(2^6 - 2^5)^2} = \frac{2^{16} - 2 \cdot 2^{15} + 2^{14}}{2^{12} - 2 \cdot 2^{11} + 2^{10}} = \frac{2^{16} - 2^{16} + 2^{14}}{2^{12} - 2^{12} + 2^{10}} = \frac{2^{14}}{2^{10}} = 2^{14} : 2^{10} = 2^4 = \mathbf{16}$$

10. L'area del rettangolo AEFG è $x^2 - 10x + 21$. Determina il perimetro di ABCDEFG, sapendo che il triangolo BCD è equilatero.



Dall'area del rettangolo posso ricavare la sua altezza, dividendo l'area per la base:

$$(x^2 - 10x + 21) : (x - 3) = x - 7$$

	1	-10	21
3		3	-21
	1	-7	0

Determino quindi il perimetro, sottraendo il lato del triangolo BD, ma sommando i due lati CB e CD:

$$2p = x - 3 + 2\,(x-7) + x - 3 - \frac{1}{2}x + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x - 3 + 2x - 14 + x - 3 - \frac{1}{2}x + x = \mathbf{\frac{9}{2}x - 20}$$