1. $tg\ x = -ctg\ 3x$

$$tg\ x = ctg\,(-3x) \quad \Rightarrow \quad tg\ x = tg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 3x + k\pi$$

$$-2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + sen\left(\frac{3}{4}\pi + x\right) = 0$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -sen\left(\frac{3}{4}\pi + x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi + x\right)$$

$$\frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi + x + 2k\pi$$

$$-2x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{13}{24}\pi + k\pi}$$

$$\frac{\pi}{6} - x = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi - x + 2k\pi$$

$$\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$$

3. $\frac{sen\ x}{1+\cos x} = 2 - ctg\ x$

$$\frac{sen\ x}{1 + \cos x} = 2 - \frac{\cos x}{sen\ x}$$

$$sen^2\ x = 2\ sen\ x + 2\ senx\cos x - \cos x - \cos^2 x \qquad C.A.:\ \ x \neq k\pi$$

$$1 - 2\ sen\ x - 2\ senx\cos x + \cos x = 0$$

$$1 - 2\ sen\ x + \cos x\ \ (1 - 2\ sen\ x) = 0$$

$$(1 - 2\ sen\ x)(1 + \cos x) = 0$$

$1 + \cos x \neq 0$, per le condizioni di accettabilità, perciò la soluzione è:

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi}$$

4. $\sqrt{3}\,sen\ 4x + \cos\ 4x = 2$

Pongo: $sen\ 4x = Y$ e $\cos 4x = X$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,Y + X = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2 - \sqrt{3}\,Y \\ 4 + 3Y^2 - 4\sqrt{3}Y + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2 - \sqrt{3}\,Y \\ 4Y^2 - 4\sqrt{3}Y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 2 - \sqrt{3}\,Y \\ \left(2Y - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}}$$

5. $3\, sen^2 x - 2\sqrt{3}\, senx \cos x - 3\cos^2 x = -2\sqrt{3}$

$$3\, sen^2 x - 2\sqrt{3}\, senx \cos x - 3\cos^2 x = -2\sqrt{3}\,(\cos^2 x + sen^2 x)$$

$$\left(3+2\sqrt{3}\right) sen^2 x - 2\sqrt{3}\, senx \cos x + \left(2\sqrt{3}-3\right)\cos^2 x = 0$$

Divido per cos²x, ma prima verifico se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione: $\left(3+2\sqrt{3}\right) = 0$. Ho dimostrato che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione.

$$\left(3+2\sqrt{3}\right) tg^2 x - 2\sqrt{3}\, tgx + 2\sqrt{3} - 3 = 0$$

$$tg\, x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-12+9}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = 2-\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{12} + k\pi}$$

6. $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Si tratta di un sistema simmetrico che si può risolvere con un'equazione di secondo grado:

$$z^2 - \frac{1-\sqrt{2}}{2} z - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

Questa equazione si ottiene anche ricavando uno dei due coseni da una delle equazioni e sostituendolo nell'altra:

$$4z^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right) z - \sqrt{2} = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1-\sqrt{2} \pm \sqrt{1-2\sqrt{2}+2+4\sqrt{2}}}{4} = \frac{1-\sqrt{2} \pm \left(1+\sqrt{2}\right)}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \\ \boldsymbol{y = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi} \\ \boldsymbol{y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \end{cases}$$

7. $\frac{1+|\, sen\, x\,|}{2\cos x - \sqrt{3}} < 0$

Il numeratore è sempre positivo, perciò resta da studiare solo il denominatore:

$$2\cos x - \sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi}$$

8. $\sqrt{\sqrt{2} - 2\cos x} \leq 0$

Un radicale non può mai essere negativo, perciò potrà essere solo nullo e, in tal caso, è nullo quando è nullo il suo argomento:

$$\sqrt{2} - 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

9. $4\, sen\, 5x \cos\, 5x \geq 1$

$$2\, sen\, 10x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad sen\, 10\, x \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 10x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{60} + k\frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}}$$

10. $\frac{sen^2 x - 1}{4\cos^2 x - 3} \geq 0$

$$\frac{-\cos^2 x}{4\cos^2 x - 3} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x - 3} \leq 0$$

$$\cos^2 x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Procediamo perciò solo con il denominatore, che deve essere negativo:

$$4\cos^2 x - 3 < 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi}$$