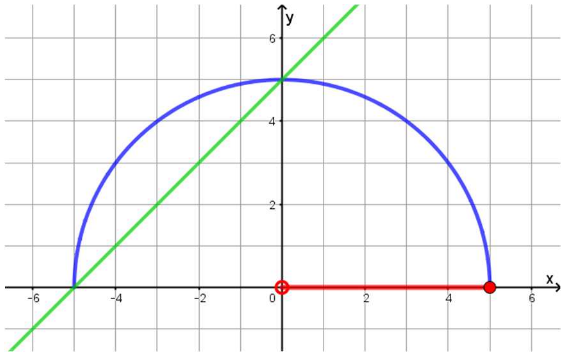
1. Risolvi graficamente le disequazioni: $\sqrt{25-x^2}<x+5$ $\qquad \sqrt{6x-x^2-8}+x\geq 4$.

Considero l'arco di circonferenza e la retta di equazione, rispettivamente:



$$y=\sqrt{25-x^2} \qquad\qquad y=x+5$$

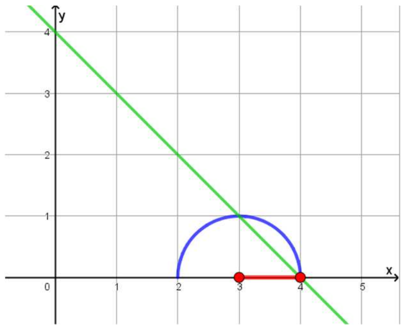
$$\begin{cases} y\geq 0 \\ 25-x^2\geq 0 \\ y^2=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\geq 0 \\ -5\leq x\leq 5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

L'arco di circonferenza è dato dalla circonferenza di centro coincidente con l'origine, ma ne considero solo la parte superiore. Per quanto riguarda la retta, si tratta di una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante e passante per il punto $(0,5)$.

Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione che ha ascissa 0. La soluzione è indicata in rosso nel disegno:

$$\mathbf{0<x\leq 5}$$

Considero l'arco di circonferenza e la retta di equazione, rispettivamente:



$$y=\sqrt{6x-x^2-8} \qquad\qquad y=4-x$$

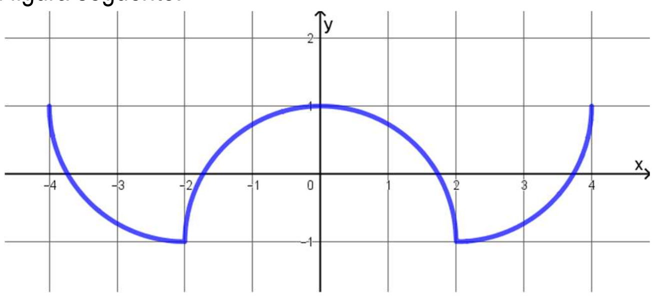
$$\begin{cases} y\geq 0 \\ 6x-x^2-8\geq 0 \\ y^2=\left(\sqrt{6x-x^2-8}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\geq 0 \\ 2\leq x\leq 4 \\ x^2+y^2-6x+8=0 \end{cases}$$

L'arco di circonferenza è dato dalla circonferenza di centro $(3;0)$, ma ne considero solo la parte superiore. Per quanto riguarda la retta, si tratta di una retta parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante e passante per il punto $(0,4)$.

Dopo aver rappresentato anche la retta, determino i punti di intersezione che hanno ascissa 3 e 4. La soluzione è indicata in rosso nel disegno:

$$\mathbf{3\leq x\leq 4}$$

2. Trova l'equazione del grafico della figura seguente:



Il primo tratto è un arco di circonferenza di centro $(-2;1)$ e raggio 2; il secondo ha centro nel punto $(0;-1)$ e raggio 2; il terzo ha centro in $(2;1)$ e raggio 2:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=4 \qquad (y-1)^2=4-x^2-4x-4 \qquad y=1-\sqrt{-x^2-4x}$$

$$(x-0)^2+(y+1)^2=4 \qquad (y+1)^2=4-x^2 \qquad y=-1+\sqrt{4-x^2}$$

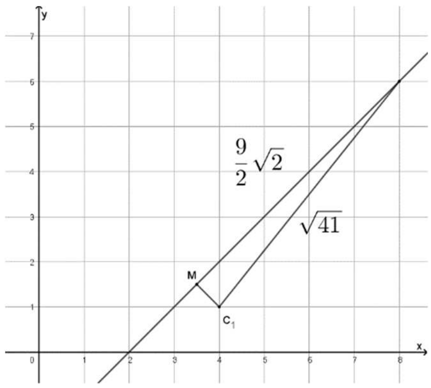
$$(x-2)^2+(y-1)^2=4 \qquad (y-1)^2=4-x^2+4x-4 \qquad y=1-\sqrt{-x^2+4x}$$

$$\boldsymbol{y=\begin{cases} 1-\sqrt{-x^2-4x} & -4\leq x\leq -2 \\ -1+\sqrt{4-x^2} & -2<x<2 \\ 1-\sqrt{4x-x^2} & 2\leq x\leq 4 \end{cases}}$$

3. Una circonferenza ha il raggio di misura $\sqrt{41}$. Di una sua corda si sa che giace sulla retta di equazione $y = x - 2$, che misura $9\sqrt{2}$ e che il suo punto medio ha ordinata $\frac{3}{2}$. Determina il centro della circonferenza.

Siccome ho l'ordinata del punto medio M della corda, posso determinarne l'ascissa, sostituendo l'ordinata nell'equazione della retta:

$$\frac{3}{2} = x - 2 \qquad x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \qquad M\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$$



Dalle informazioni che abbiamo il centro della circonferenza ha una distanza pari al raggio da uno degli estremi della corda, la distanza tra M e l'estremo della corda è metà della misura della corda e, utilizzando il teorema di Pitagora, possiamo determinare la distanza tra M e il centro della circonferenza:

$$C_1M = \sqrt{41 - \left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il centro della circonferenza, inoltre, si trova sulla retta passante per M e perpendicolare alla retta della corda. Ponendo poi la distanza dal punto medio uguale al valore appena trovato, posso determinare le coordinate dei due centri:

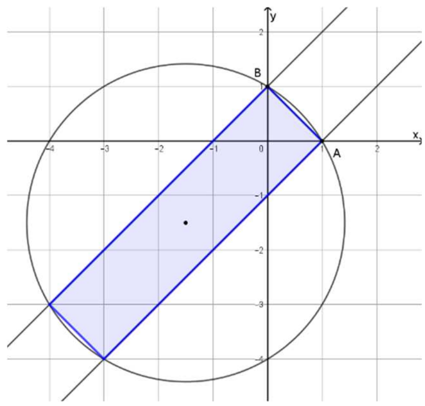
$$\begin{cases} y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{7}{2}\right) \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x + 5 \\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(-x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad x - \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2} \qquad \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right. \qquad \boldsymbol{C_1(3; 2)} \qquad \boldsymbol{C_2(4; 1)}$$

4. Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio $\frac{1}{2}\sqrt{34}$, sapendo che il suo centro appartiene al terzo quadrante e che è circoscritta a un rettangolo che ha due vertici consecutivi nei punti $(1; 0)$ e $(0; 1)$. Determina il perimetro del rettangolo.

I due vertici del rettangolo appartengono alla retta $y = -x + 1$.
La distanza tra i due vertici è: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Considero il triangolo rettangolo che ha un vertice nel punto $(1; 0)$, un altro nel centro della circonferenza e il terzo nel punto medio della base del rettangolo: conoscendo la distanza tra il centro della circonferenza e il punto $(1; 0)$ – che è pari al raggio – e la distanza tra il centro e il punto medio della base – che è metà della distanza tra i due vertici del rettangolo dati, otteniamo:

$$AM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

Perciò il lato del rettangolo è $4\sqrt{2}$ e il perimetro del rettangolo è: $2\left(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) = \boldsymbol{10\sqrt{2}}$.

Conoscendo i due punti e il raggio, posso determinare la circonferenza, sostituendo le coordinate dei due punti nell'equazione generica della circonferenza e ponendo l'espressione generale del raggio uguale al valore dato:

$$\begin{cases} 1 + 0 + a + 0 + c = 0 \\ 0 + 1 + 0 + b + c = 0 \\ \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \frac{\sqrt{34}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 - c \\ b = -1 - c \\ 1 + c^2 + 2c + 1 + c^2 + 2c - 4c = 34 \end{cases} \qquad \left[\begin{cases} a = -5 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{cases}\right] \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

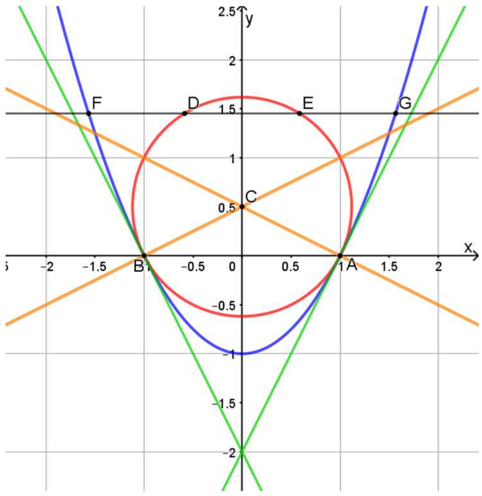
Escludo la prima soluzione, perché il centro della circonferenza deve essere nel terzo quadrante:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 3x + 3y - 4 = 0}$$

5. La parabola di equazione $y = x^2 - 1$ interseca l'asse delle ascisse nei punti A e B.
   A. Scrivi l'equazione della circonferenza bitangente in A e in B alla parabola.
   B. Determina l'equazione della retta r parallela all'asse delle ascisse, tale che la somma dei quadrati delle misure delle corde intercettate su r dalla parabola e dalla circonferenza sia uguale a 3.

Dopo aver rappresentato la parabola, determino i punti di intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(1;0) \;\; B(-1;0)$$



A. Determino le equazioni delle rette tangenti alla parabola nei punti A e B, che sono tangenti anche alla circonferenza. Determino quindi le rette perpendicolari alle due tangenti e passanti per il punto di tangenza: mettendole a sistema, determino le coordinate del centro della circonferenza e quindi posso trovarne l'equazione.

$$t_A: \frac{y}{2} = x - 1 \qquad y = 2x - 2$$

$$t_B: \frac{y}{2} = -x - 1 \qquad y = -2x - 2$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y = \frac{1}{2}(x + 1) \end{cases} \qquad x - 1 = -x - 1 \qquad C\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - y - 1 = 0}$$

B. Considero la retta parallela all'asse delle ascisse, di generica equazione $y = k$, tale che interseca la circonferenza nei punti D ed E e la parabola nei punti G ed F – come in figura. La richiesta è: $\overline{DE}^2 + \overline{FG}^2 = 3$.
Determino le generiche intersezioni con le due coniche e pongo la somma dei quadrati delle distanze uguale a 3:

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \qquad x^2 = 1 + k \qquad D\left(-\sqrt{1 + k}; k\right) \quad E\left(\sqrt{1 + k}; k\right)$$

$$\begin{cases} y = k \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad x^2 = -k^2 + k + 1 \qquad F\left(-\sqrt{1 + k - k^2}; k\right) \quad G\left(\sqrt{1 + k - k^2}; k\right)$$

$$\left(2\sqrt{1 + k}\right)^2 + \left(2\sqrt{1 + k - k^2}\right)^2 = 3 \qquad 4(1 + k) + 4(1 + k - k^2) = 3$$

$$4 + 4k + 4 + 4k - 4k^2 = 3 \qquad 4k^2 - 8k - 5 = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

Considerando che il raggio della circonferenza è $\frac{\sqrt{5}}{2}$, perciò: $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, non posso accettare il valore $\frac{5}{2}$.

La retta richiesta ha quindi equazione: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}}$.