

$$1. \quad \frac{x + \sqrt{2}}{2} - \frac{x^2 - 2 + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$$

$$x + \sqrt{2} - x^2 + 2 - \sqrt{2} = 2 - x\sqrt{2} \quad x^2 - x(1 + \sqrt{2}) = 0 \quad x[x - (1 + \sqrt{2})] = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$2. \quad 2x + \sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2} - 2x}{2x + \sqrt{2}}$$

$$4x^2 + 2 + 4x\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} - 2x \quad C.A.: x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4x^2 + 2x(1 + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}}{4} = \begin{cases} -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ acc.} \\ \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \text{ acc.} \end{cases}$$

$$3. \quad ax^2 - (a - 6)x - 6 = 0$$

$$\text{Se } a = 0: 6x - 6 = 0 \quad x = 1$$

$$\text{Se } a \neq 0: \Delta = (a - 6)^2 + 24a = a^2 - 12a + 36 + 24a = a^2 + 12a + 36 = (a + 6)^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \frac{a - 6 \pm (a + 6)}{2a} = \begin{cases} -\frac{6}{a} \\ 1 \end{cases}$$

$$4. \quad x(x - 1) - a(x - a) = a(x - 1) + 2$$

$$x^2 - x - ax + a^2 = ax - a + 2 \quad x^2 - x(1 + 2a) + a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Delta = (1 + 2a)^2 - 4(a^2 + a - 2) = 1 + 4a + 4a^2 - 4a^2 - 4a + 8 = 9 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + 2a \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 + a \\ a - 1 \end{cases}$$

$$5. \quad 5x^4 + 26x^3 - 26x - 5 = 0$$

Equazione reciproca di quarto grado. Applico l'algoritmo di Ruffini con $x = 1$. Poi ricado in una reciproca di terzo grado, perciò posso applicare l'algoritmo di Ruffini con $x = -1$. Infine, applico la formula risolutiva all'equazione di secondo grado.

	5	26	0	-26	-5
1		5	31	31	5
	5	31	31	5	0
-1		-5	-26	-5	
	5	26	5	0	

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_{3,4} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 25}}{5} = \begin{cases} -\frac{5}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$6. \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{10} + 31\left(\frac{2x-1}{x}\right)^5 - 32 = 0$$

$$\text{Pongo: } \left(\frac{2x-1}{x}\right)^5 = y \quad y^2 + 31y - 32 = 0 \quad \text{C.A.: } x \neq 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{961 + 128}}{2} = \begin{cases} -32 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2x-1}{x}\right)^5 = -32 \quad \frac{2x-1}{x} = -2 \quad 2x-1 = -2x \quad x = \frac{1}{4} \text{ acc.}$$

$$\left(\frac{2x-1}{x}\right)^5 = 1 \quad \frac{2x-1}{x} = 1 \quad 2x-1 = x \quad x = 1 \text{ acc.}$$

7. Data l'equazione $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k+2 = 0$, determina k in modo che:

- le radici siano reali e distinte;
- la somma delle radici sia positiva;
- il prodotto delle radici sia -3 ;
- la somma dei reciproci delle radici sia uguale a 8 .

a. Devo porre il determinante maggiore di zero:

$$\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - (k-1)(k+2) > 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - k^2 - 2k + k + 2 > 0 \quad k > -3$$

b. Pongo la somma delle radici, ovvero l'opposto del rapporto fra coefficiente del termine di primo grado e coefficiente del termine di secondo grado, maggiore di zero:

$$\frac{2(k+1)}{k-1} > 0 \quad \begin{matrix} N > 0 & k > -1 \\ D > 0 & k > 1 \end{matrix}$$

	-1	1
-	+	+
-	-	+
+	-	+

$$k < -1 \quad \vee \quad k > 1$$

La soluzione della disequazione frazionaria va messa a sistema con la condizione di realtà del punto a:

$$-3 \leq k < -1 \quad \vee \quad k > 1$$

c. Pongo il rapporto fra il termine noto e il coefficiente del termine di secondo grado uguale a -3 :

$$\frac{k+2}{k-1} = -3 \quad k+2 = -3k+3 \quad k = \frac{1}{4}$$

d.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 8 \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 8 \quad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 8 \quad \frac{-b}{c} = 8$$

$$\frac{2(k+1)}{k+2} = 8 \quad \frac{k+1}{k+2} = 4 \quad k+1 = 4k+8 \quad k = -\frac{7}{3}$$

8. Un rettangolo è equivalente a un quadrato di lato 10 cm. Determina il perimetro del rettangolo, sapendo che la metà della base sommata al doppio dell'altezza è 20 cm.

Indico le dimensioni del rettangolo con x e $\frac{100}{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{100}{x} + 2x &= 20 & \frac{50}{x} + 2x &= 20 & 2x^2 - 20x + 50 &= 0 \\ x^2 - 10x + 25 &= 0 & (x - 5)^2 &= 0 & x &= 5 \end{aligned}$$

Le due dimensioni sono perciò 5 cm e 20 cm e il perimetro è **50 cm**.

9. Per abbellire una coperta rettangolare che ha la superficie di $5,72 \text{ m}^2$ viene cucito sui quattro lati un pizzo lungo 9,6 m. Quali sono le dimensioni della coperta?

Indico le due dimensioni con x_1 e x_2 :

$$x_1 + x_2 = \frac{9,6}{2} = 4,8 \quad x_1 x_2 = 5,72$$

Conoscendo somma e prodotto dei due termini, posso calcolarli con l'equazione di secondo grado:

$$x^2 - 4,8x + 5,72 = 0 \quad x_{1,2} = 2,4 \pm \sqrt{5,76 - 5,72} = 2,4 \pm 0,2 = \left\{ \begin{array}{l} 2,6 \\ 2,2 \end{array} \right.$$

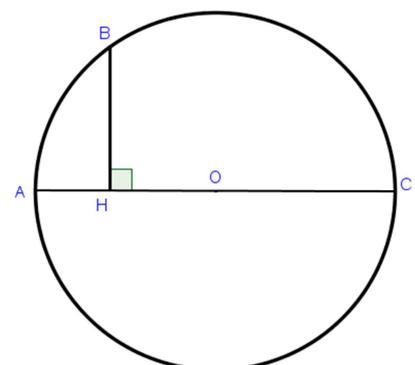
Le due dimensioni sono **2,6 cm** e **2,2 cm**.

10. Dimostra che in una circonferenza il quadrato costruito su una corda AB, non passante per il centro, è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti alla proiezione della corda sul diametro AC e al diametro stesso.

Hp: C, r, O
 $A, B, C \in C$
 $O, H \in \overline{AC}$
 $BH \perp AC$

Tesi: $\overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$

ABC, in quanto inscritto in una semicirconferenza, è un triangolo rettangolo in B. BH è l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa, pertanto, **applicando il primo teorema di Euclide**, abbiamo la tesi del problema.



11. Disegna un trapezio rettangolo con la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alla base minore e alla differenza delle basi del trapezio.

Hp: $ABCD$ trapezio rettangolo in A e D
 $AC \perp BC$

Tesi: $\overline{AD}^2 = \overline{DC} \cdot (\overline{AB} - \overline{DC})$

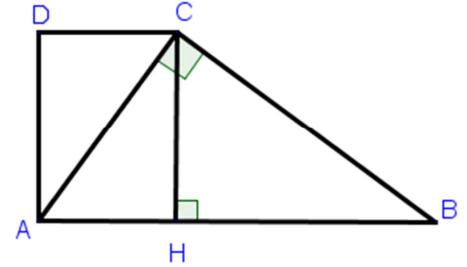
Considero il triangolo ABC , rettangolo in B per ipotesi.

Trattandosi di un trapezio rettangolo, valgono le seguenti congruenze:

$$\overline{AD} \cong \overline{CH} \quad \overline{DC} \cong \overline{AH} \quad \overline{AB} - \overline{DC} \cong \overline{HB}$$

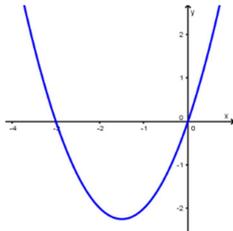
Applicando il secondo teorema di Euclide, $\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$ abbiamo la tesi del problema, ovvero:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC} \cdot (\overline{AB} - \overline{DC})$$

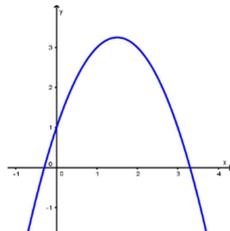


12. Associa ad ogni parabola la sua equazione (due equazioni non hanno rappresentazione):

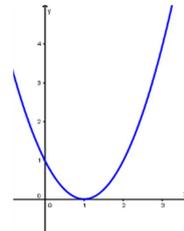
$$y = -x^2 + 3x + 1 \quad y = -x^2 + 2x \quad y = -x^2 + 2 \quad y = 2x^2 - 4 \quad y = x^2 + 3x \quad y = x^2 - 2x + 1$$



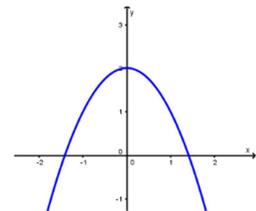
$$y = x^2 + 3x$$



$$y = -x^2 + 3x + 1$$



$$y = x^2 - 2x + 1$$



$$y = -x^2 + 2$$