1. Determina l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e avente fuoco nel punto $(-3;0)$.

Avendo fuoco sull'asse x, $a > b$ e l'eccentricità è data da: $e = \frac{c}{a}$, perciò:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 3 \\ a = \sqrt{10} \end{cases}$$

Dalla relazione tra a, b e c, posso determinare l'ultimo coefficiente dell'equazione dell'ellisse:

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 = a^2 - c^2 = 10 - 9 = 1$$

L'equazione dell'ellisse è: $\boldsymbol{\frac{x^2}{10} + y^2 = 1}$

2. Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x, avente il semiasse trasverso di lunghezza $2\sqrt{3}$ e passante per il punto $(2\sqrt{6}; 2)$.

Avendo i fuochi sull'asse x, il semiasse trasverso è $a = 2\sqrt{3}$. Ora posso imporre il passaggio per il punto dato, sostituendo le sue coordinate nell'equazione $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{24}{12} - \frac{4}{b^2} = 1 \qquad \frac{4}{b^2} = 1 \qquad b^2 = 4$$

L'equazione dell'iperbole è: $\boldsymbol{\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1}$

3. Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 2y^2 = 54$, nei suoi punti di ordinata 3.

Determino innanzi tutto l'ascissa dei punti, sostituendo l'ordinata nota nell'equazione dell'ellisse:

$$9x^2 + 18 = 54 \qquad x^2 = 4 \qquad A\,(-2;3) \qquad B\,(2;3)$$

Applico ora la formula di sdoppiamento: $\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$

$$t_A: -18x + 6y = 54 \qquad \boldsymbol{y = 3x + 9}$$
$$t_B: \ 18x + 6y = 54 \qquad \boldsymbol{y = -3x + 9}$$

4. Determina l'equazione dell'ellisse passante per i punti $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{10}\right)$ e $B\left(-2; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.

Impongo il passaggio dell'ellisse per i punti dati, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione canonica dell'ellisse:

$\begin{cases} \frac{1}{4\,a^2} + \frac{63}{100\,b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{12}{25\,b^2} = 1 \end{cases}$ ma per procedere più speditamente, uso delle incognite ausiliarie: $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}A + \dfrac{63}{100}B = 1 \\ 4A + \dfrac{12}{25}B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 4 - \dfrac{63}{25}B \\ 16 - \dfrac{252}{25}B + \dfrac{12}{25}B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{240}{25}B = -15 \\ A = 4 - \dfrac{63}{25}B \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{16} \\ B = \dfrac{25}{16} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x^2 + 25\,y^2 = 16}$$

5. Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente un vertice reale di coordinate $(0;2)$ e un vertice non reale nel punto $(-4;0)$, calcola la lunghezza della corda individuata sulla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Dai dati otteniamo:

$$a = 4 \qquad b = 2$$

Perciò l'equazione dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = -1$$

Metto a sistema l'equazione dell'iperbole con quella della bisettrice del primo e terzo quadrante, determino le coordinate dei punti di intersezione e poi calcolo la distanza tra i due punti:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = -16 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 - 4x^2 = -16 \qquad x_{1,2} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \qquad B\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ora calcolo la distanza tra i due punti:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{3}}$$

6. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$\sqrt{4x^2+4} > x + 2$$

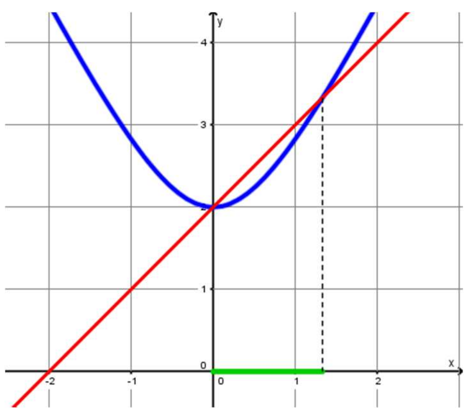
Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = \sqrt{4x^2+4} \qquad \text{e} \qquad y = x + 2$$

La prima funzione è equivalente al sistema: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = -1 \end{cases}$

che rappresenta la metà superiore di un'iperbole con i fuochi sull'asse y e vertice reale (0; 2).

La seconda funzione corrisponde ad una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante.



Dal grafico possiamo dedurre la soluzione:

$$\boldsymbol{x < 0 \quad \vee \quad x > \alpha} \qquad \text{con } 1 < \alpha < 2.$$