Calcola il valore delle seguenti espressioni e scrivi il risultato in forma algebrica:

1. $\frac{17}{4i-1}+\frac{5(2+i)(2-i)}{16\, i^{43}}:\frac{(1-2i)^2}{(4i^{18}+i^7-3i)^2}$

$$=\frac{17}{4i-1}\cdot\frac{-4i-1}{-4i-1}+\frac{5\cdot 5}{-16\, i}:\frac{1-4-4i}{(-4-i-3i)^2}=\frac{17}{17}(-4i-1)-\frac{25}{16\, i}\cdot\frac{\left(-4(1+i)\right)^2}{-3-4i}=$$

$$=-4i-1+\frac{25}{16\, i}\cdot\frac{16\,(1-1+2i)}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=-4i-1+\frac{25}{i}\cdot\frac{2i\,(3-4i)}{9+16}=-4i-1+2\,(3-4i)=-4i-1+6-8i=\boldsymbol{5-12\, i}$$

2. $\left\{\left[\sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right]^4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left[\sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{-4}\right\}^{-3}$

$$=\left\{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{-3}=$$

$$=\left(\cos\frac{1+3-2}{6}\pi+i\sin\frac{1+3-2}{6}\pi\right)^{-3}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-3}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=\boldsymbol{-1}$$

3. $\frac{\left(e^{i\pi}\right)^2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 4\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\, e^{i\frac{5}{4}\pi}}$

$$=\frac{e^{2\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot 2\, e^{\frac{\pi}{2}i}}{e^{\frac{5}{4}\pi i}}=2\, e^{\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)\pi i}=2\, e^{\frac{3}{2}\pi i}=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=\boldsymbol{-2i}$$

Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

4. $x^8-ix^6-64\, x^2+64\, i=0$

$$x^6(x^2-i)-64\,(x^2-i)=0 \qquad (x^2-i)(x^6-64)=0$$

$$(x^2-i)(x^3-8)(x^3+8)=0 \qquad (x^2-i)(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)=0$$

$$x^2=i \qquad x=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

$$\boldsymbol{x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\boldsymbol{x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_3=2} \qquad x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-4}=\boldsymbol{-1\pm i\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{x_6=-2} \qquad x_{7,8}=1\pm\sqrt{1-4}=\boldsymbol{1\pm i\sqrt{3}}$$

5. $x^3=8i$

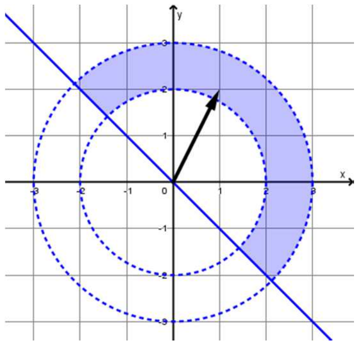
$$x^3+8i^3=0 \qquad (x+2i)(x^2-2ix-4)=0$$

$$\boldsymbol{x_1=-2i} \qquad x_{2,3}=i\pm\sqrt{-1+4}=\boldsymbol{i\pm\sqrt{3}}$$

6. Rappresenta nel piano di Gauss i punti corrispondenti ai numeri complessi che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2 < |z| < 3 \\ Re\,(z) + Im\,(z) \geq 0 \end{cases}$$

Il numero complesso $1 + 2i$ appartiene all'insieme?



Come si vede dall'immagine, il numero complesso $1 + 2i$ appartiene all'insieme, infatti il suo modulo è compreso tra 2 e 3 essendo $\sqrt{5}$.

7. Determina a e b in modo che $\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = a + bi$.

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^7 = 2^7\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -64\sqrt{3} - 64\,i$$

$$\boldsymbol{a = -64\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{b = -64}$$

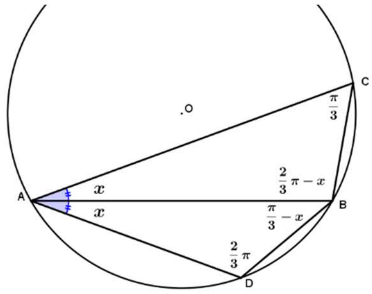
8. Determina $z = a + bi$, risolvendo l'equazione: $|z - 2i|^2 - 2i = \bar{z}$.

$$|a + bi - 2i|^2 - 2i = a - bi \qquad a^2 + (b-2)^2 - 2i = a - bi$$

$$\begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = a \\ -2 = -b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ a^2 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ a\,(a-1) = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{z_1 = 2i} \qquad \boldsymbol{z_2 = 1 + 2i}$$

9. **Svolgi uno dei seguenti problemi a tua scelta:**

In una circonferenza di raggio r, è data la corda AB di misura $r\sqrt{3}$; conduci per A due semirette che formino con AB angoli congruenti e tali che, indicate con D e C le loro intersezioni con la circonferenza data, il perimetro del quadrilatero $ACBD$ sia uguale a kr, con k parametro reale.



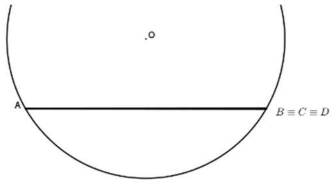
Rappresento la semicirconferenza:

$$\overline{AB} = r\sqrt{3} \qquad C\hat{A}B = B\hat{A}D$$

Pongo: $C\hat{A}B = B\hat{A}D = x$ e valuto i casi limite:

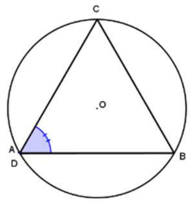
$\boldsymbol{x = 0}$

$$2\,\overline{AB} = kr$$
$$k = 2\sqrt{3}$$



$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$

$$3\,\overline{AB} = kr$$
$$k = 3\sqrt{3}$$



Perciò: $\boldsymbol{0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}}$

Determiniamo l'equazione generica, applicando, nel caso di tutti e quattro i lati del poligono, il teorema della corda:

$$\overline{AC} = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) \qquad \overline{BC} = 2r\sin x \qquad \overline{BD} = 2r\sin x \qquad \overline{AD} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) + 2r\sin x + 2r\sin x + 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = kr$$

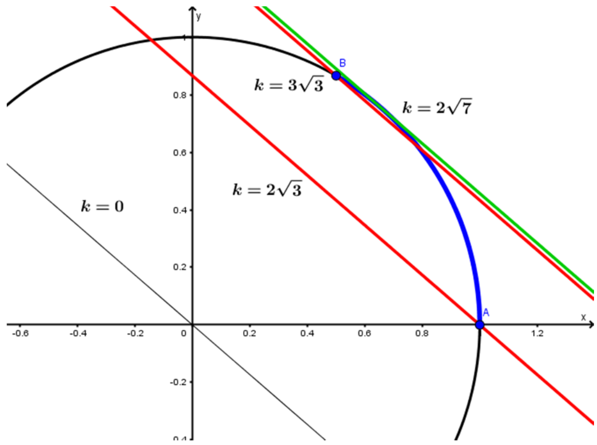
$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 2\sin x + 2\sin x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = k$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x + 4\sin x = k \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\,X + 4\,Y = k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ \dfrac{1}{2} \leq X \leq 1;\;\; 0 \leq Y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Il fascio è improprio.

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A(1;0): \quad k = 2\sqrt{3}$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right): \quad \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = k \quad \Longrightarrow \quad k = 3\sqrt{3}$$

Tangente: $\frac{|k|}{\sqrt{12+16}} = 1 \qquad k = \pm 2\sqrt{7}$ e prendo il valore positivo

Concludendo quindi:

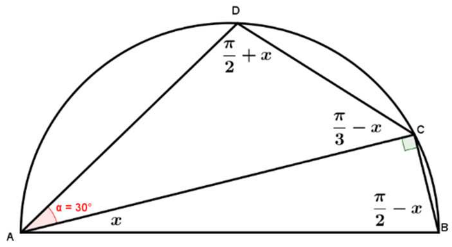
$\boldsymbol{una\ soluzione\ per\ \ 2\sqrt{3} \leq k < 3\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{due\ soluzioni\ per\ \ 3\sqrt{3} \leq k \leq 2\sqrt{7}}$

In una semicirconferenza di diametro AB, che misura $2r$, è inscritto un quadrilatero $ABCD$, tale che la diagonale AC formi con il lato AD un angolo di 30°. Posto $C\hat{A}B = x$, esprimi e rappresenta in un periodo la funzione: $f(x) = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Evidenzia la parte del grafico che si riferisce al problema geometrico e indica il numero di intersezioni con le rette $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

Rappresento la semicirconferenza:

$$\overline{AB} = 2r \qquad C\hat{A}D = 30°$$

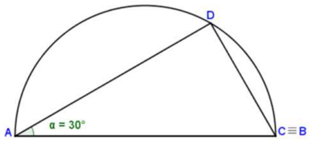
Pongo: $B\hat{A}C = x$ e valuto i casi limite:



$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$\frac{2r + 0 + 2r\frac{\sqrt{3}}{2}}{r} = f(x)$$

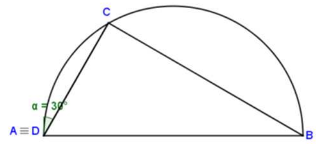
$$f(x) = 2 + \sqrt{3}$$



$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{2r + 2r\frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{r} = f(x)$$

$$f(x) = 2 + \sqrt{3}$$



Perciò: $\boldsymbol{0 \le x \le \frac{\pi}{3}}$

Determiniamo l'equazione generica, applicando il teorema della corda:

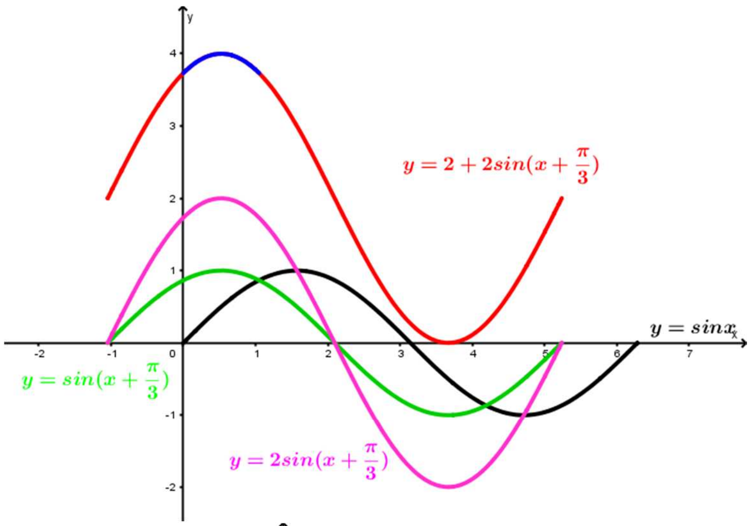
$$\overline{AB} = 2r \qquad \overline{BC} = 2r\sin x \qquad \overline{AD} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \qquad \overline{DC} = 2r\sin 30° = r$$

$$\frac{2r + 2r\sin x + 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{r} = f(x)$$

$$f(x) = 2 + 2\sin x + \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = \boldsymbol{2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}$$

Rappresento la funzione in un periodo, π, costruendola a partire dalle traslazioni della funzione $y = \sin x$.

Nell'ultimo grafico, quello della funzione, il tratto in blu è quello che si riferisce al problema geometrico, cioè $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.



Determino la funzione nei due estremi dell'intervallo:

$$f(0) = 2 + \sqrt{3} \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

Considerando le rette parallele all'asse x possiamo concludere:

$$\boldsymbol{due\ soluzioni\ per\ \ 2 + \sqrt{3} \le k \le 4}$$