1. A.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

1. Dominio: $\boldsymbol{D =]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]-1;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[}$ trattandosi di una funzione razionale fratta, devo porre il denominatore diverso da 0.

2. Eventuali simmetrie: $f(-x) = \frac{-x^3-1}{x^2-1} \neq \pm f(x)$, perciò la funzione non è **né pari né dispari**

3. Intersezioni con gli assi: La funzione può essere riscritta: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

   La funzione non ha intersezioni con l'asse x, visto che il numeratore è sicuramente diverso da 0 (si tratta di un falso quadrato).

$$asse\ y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A(0;1)}$$

4. Positività: determinare la positività è semplice, visto che il falso quadrato a numeratore è sempre positivo:

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} > 0 \qquad x+1>0 \qquad \boldsymbol{x > -1}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \pm\infty \qquad \boldsymbol{x = -1}\ \textbf{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2} \qquad \boldsymbol{x = 1}\ \textbf{singolarità eliminabile}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \pm\infty$$

Può esistere asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1} = 0$$

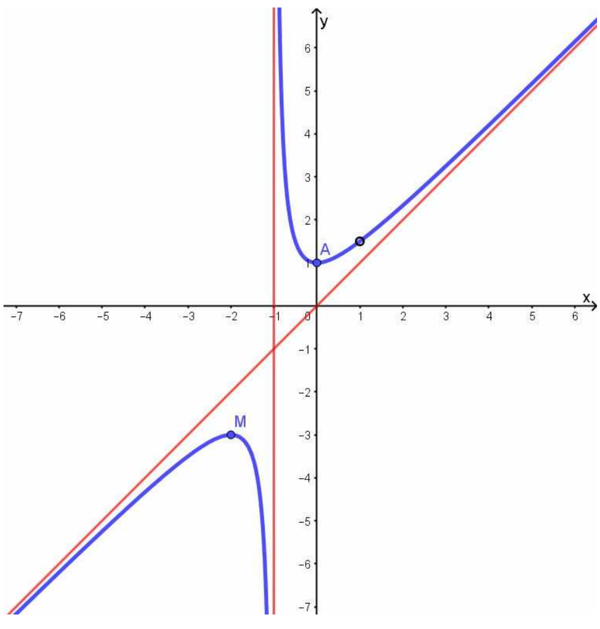
$\boldsymbol{y = x}$ **asintoto obliquo**

6. Massimi e minimi:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Punti stazionari per $x = 0$ e $x = -2$.
La derivata è positiva per $x < -2 \quad \vee \quad x > 0$, perciò ha massimo in $\boldsymbol{M(-2;\ -3)}$ e minimo in $\boldsymbol{A(0;1)}$.



7. Punti di flesso:

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} =$$

$$= 2\frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$$

Positiva per $x > -1$, quindi non ha flessi.

La funzione è simmetrica rispetto al punto di intersezione tra i due asintoti.

B.

$$g(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

1. Dominio: $\boldsymbol{D =]0;\ +\infty[}$ ponendo l'argomento della radice maggiore di 0.

2. Eventuali simmetrie: siccome il dominio non è simmetrico, la funzione sicuramente non è **né pari né dispari**

3. Intersezioni con gli assi: La funzione non ha intersezioni con l'asse y, perché escluso dal dominio e non ha intersezioni con l'asse x, visto che il numeratore è sempre diverso da 0.

4. Positività: determinare la positività è semplice, visto che sia numeratore che denominatore sono sempre positivi.

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$\boldsymbol{x = 0}$ **asintoto verticale**

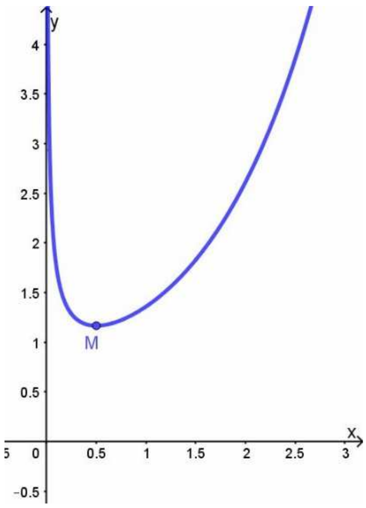
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$

Potrebbe esistere asintoto obliquo, ma in realtà anche il coefficiente angolare non esiste, sempre per la gerarchia degli infiniti.

6. Massimi e minimi:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(e^x\sqrt{x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{e^x(2x-1)}{4x\sqrt{x}}$$

Punto stazionario in $x = \frac{1}{2}$.
La derivata è positiva per $x > \frac{1}{2}$, considerando che il denominatore (per il dominio) è sicuramente positivo, perciò ha minimo in $\boldsymbol{M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2e}}{2}\right)}$.



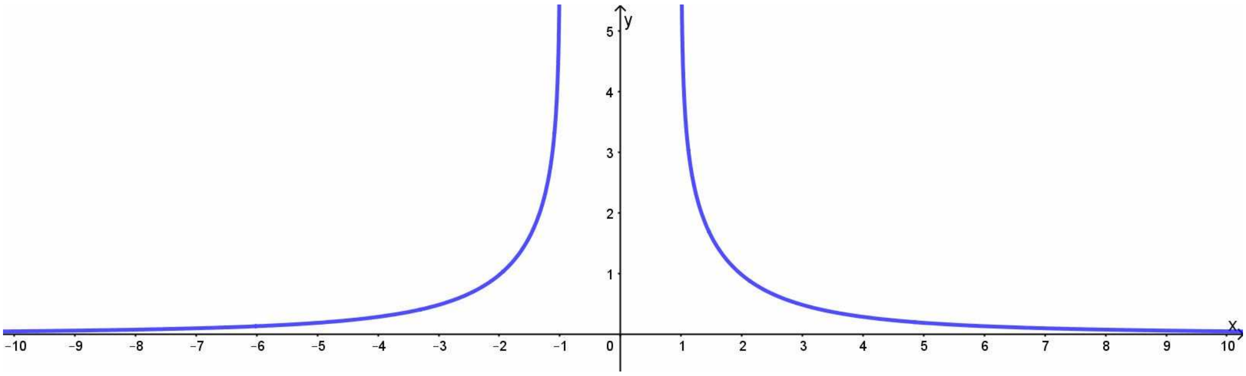
7. Punti di flesso: per calcolare la derivata seconda, è più semplice riscrivere la derivata prima in questo modo:

$$g'(x) = \frac{e^x(2x-1)}{4x\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)$$

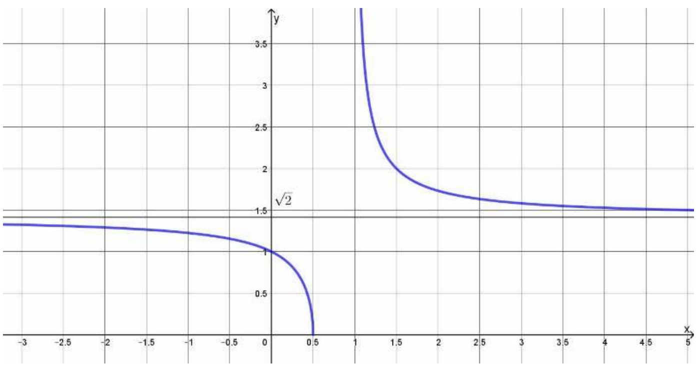
$$g''(x) = \frac{e^x(2x-1)}{4x\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{2x}\right) + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{e^x}{8x^2\sqrt{x}}((2x-1)^2 + 2) > 0$$

Positiva in ogni punto del dominio, quindi con concavità rivolta verso l'alto.

2. Rappresenta la funzione che ha le seguenti caratteristiche:
   - $D = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$
   - Funzione pari, sempre positiva, senza intersezioni con gli assi cartesiani
   - $y = 0$ asintoto orizzontale
   - $x = \pm 1$ asintoti verticali
   - Funzione crescente per $x < 1$
   - Funzione con concavità sempre positiva



3. Dal grafico dato, deduci i dati dello studio di funzione.



1. Dominio: $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup (1;\ +\infty)$
2. Funzione né pari né dispari
3. Intersezioni con gli assi: $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $B(0; 1)$
4. Positività: $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in D$
5. Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ asintoto orizzontale
   $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e $x = 1$ asintoto verticale
6. Funzione sempre decrescente, ovvero $f'(x) < 0 \quad \forall x \in D$
7. Funzione con concavità negativa per $x < \frac{1}{2}$ e per il resto del dominio con concavità positiva.