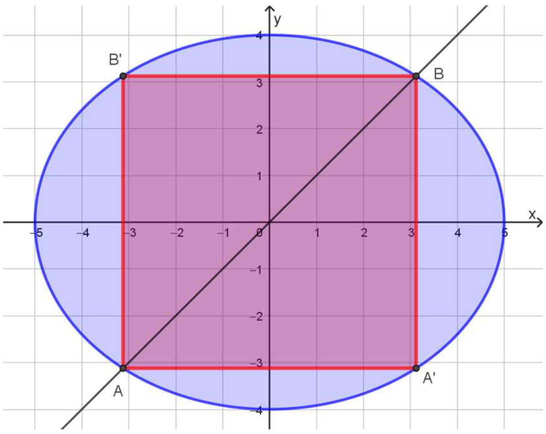
1. Considera l'ellisse che ha un vertice in $A(5{,}0)$ e un fuoco in $F(3{,}0)$. Determina:
   A. l'equazione dell'ellisse;
   B. il rapporto tra l'area del quadrato inscritto nell'ellisse (avente i lati paralleli agli assi cartesiani) e l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse stessa;
   C. l'equazione della parabola, con asse orizzontale, che ha vertice nel fuoco dell'ellisse di ascissa negativa e passa per i punti di intersezione dell'ellisse con l'asse y;
   D. le equazioni delle rette tangenti all'ellisse e alla parabola nel loro punto d'intersezione con il semiasse delle ordinate positive;
   E. le aree delle due parti in cui la parabola divide la regione di piano racchiusa dall'ellisse.



A. Data la generica equazione dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, dato il vertice sull'asse x, si ottiene: $a=5$. Il fuoco ha coordinate generiche $F(c;0)$ sull'asse x, perciò: $c^2=a^2-b^2$. Posso, quindi, determinare b:

$$b^2=a^2-c^2=25-9=16 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$

B. Per determinare i vertici del quadrato inscritto nell'ellisse, determino le coordinate dell'intersezione tra la bisettrice di primo e terzo quadrante e l'ellisse. Gli altri due vertici del quadrato saranno i simmetrici rispetto agli assi dei due punti così determinati:

$$\begin{cases} 16\,x^2+25\,y^2=400 \\ y=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm\dfrac{20}{\sqrt{41}} \\ y=\pm\dfrac{20}{\sqrt{41}} \end{cases}$$

Bastano due vertici del quadrato per determinarne il lato:

$$B\left(\frac{20}{\sqrt{41}};\frac{20}{\sqrt{41}}\right) \quad B'\left(-\frac{20}{\sqrt{41}};\frac{20}{\sqrt{41}}\right) \qquad \overline{BB'}=\left|\frac{20}{\sqrt{41}}+\frac{20}{\sqrt{41}}\right|=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

A questo punto, posso calcolare il rapporto tra le due aree, ricordando che l'area dell'ellisse è data da: πab, dove a e b rappresentano le lunghezze dei semiassi, mentre l'area del quadrato è data dal quadrato del lato:

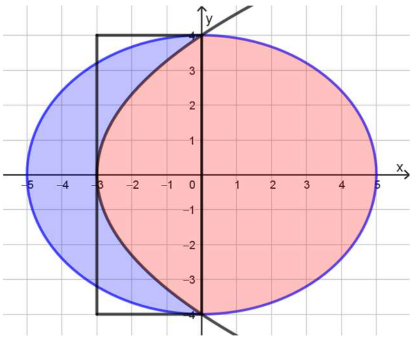
$$\frac{\left(\frac{40}{\sqrt{41}}\right)^2}{\pi\cdot5\cdot4}=\frac{40\cdot40}{41\cdot\pi\cdot20}=\boldsymbol{\frac{80}{41\pi}}$$

C. La parabola da determinare ha vertice di coordinate $(-3;0)$, asse di simmetria coincidente con l'asse x e, quindi, generica equazione: $x=ay^2+c$. Inoltre, passa per i vertici dell'ellisse che si trovano sull'asse y, ovvero per i punti $B_1(0,-4)$ e $B_2(0,4)$. Perciò, imponendo il passaggio della parabola per il vertice e per B_2, ovvero sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione generica, ottengo:

$$\begin{cases} -3=0+c \\ 0=16a+c \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-3 \\ a=\dfrac{3}{16} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x=\frac{3}{16}y^2-3}$$

D. La tangente all'ellisse passante per B_2 è una retta parallela all'asse x, di equazione $y=4$. Per la parabola, invece, applico la formula di sdoppiamento:

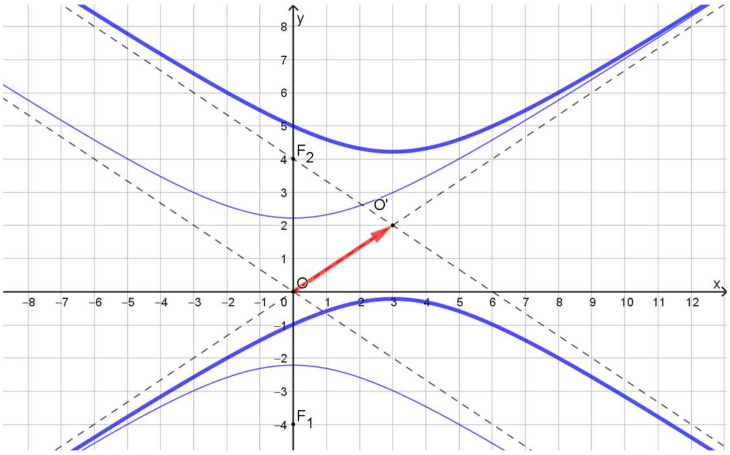
$$\frac{x+x_{B_2}}{2}=\frac{3}{16}yy_{B_2}-3 \qquad \frac{x}{2}=\frac{3}{4}y-3 \qquad \boldsymbol{2x-3y+12=0}$$



E. Determino l'area del segmento parabolico, ricordando che è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo nel quale è inscritto: il rettangolo (indicato in nero nel disegno) ha un lato sull'asse y, il lato opposto sulla retta $y=-3$, tangente alla parabola e parallela all'asse y. Perciò ha dimensioni 8 e 3 e, quindi, l'area del segmento parabolico è data da: $\frac{2}{3}\cdot8\cdot3=16$. Dato che l'area dell'ellisse è stata precedentemente determinata, le due aree, la prima indicata in blu e la seconda in rosso, misurano:

$$\mathcal{A}_1=\boldsymbol{10\,\pi-16} \qquad \mathcal{A}_2=\boldsymbol{10\,\pi+16}$$

2. Scrivi l'equazione dell'iperbole i cui asintoti hanno equazioni $2x-3y=0$ e $2x+3y-12=0$, sapendo che l'asse trasverso è parallelo all'asse delle y e la semidistanza focale è uguale a 4. Traccia il grafico e calcola l'eccentricità.



Determino il punto di intersezione dei due asintoti, ovvero il centro di simmetria dell'iperbole:

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x+3y-12=0 \end{cases} \quad 4x-12=0 \qquad \boldsymbol{O'(3,2)}$$

Considero, per semplicità, l'iperbole traslata con centro nell'origine degli assi, con asintoti $y=\pm\frac{2}{3}x$ e fuochi $F_1(0,-4)$ e $F_2(0,4)$. Determino l'equazione dell'iperbole:

$$\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{2}{3} \\ c=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{2}{3}a \\ \sqrt{a^2+b^2}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=\frac{4}{9}a^2 \\ a^2+\frac{4}{9}a^2=16 \end{cases}$$

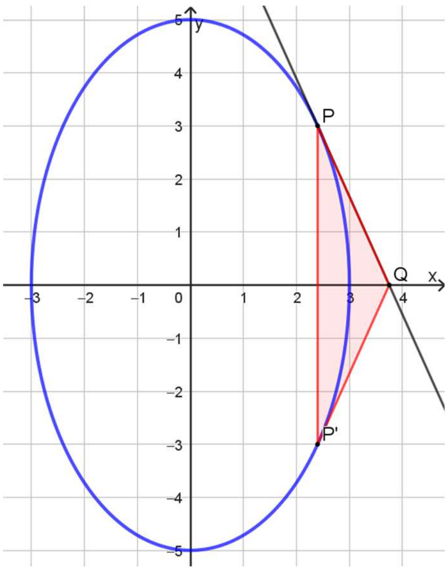
$$a^2=\frac{144}{13} \qquad b^2=\frac{64}{13} \qquad \frac{13\,x^2}{144}-\frac{13\,y^2}{64}=-1$$

Ottenuta l'iperbole con centro nell'origine, la traslo rispetto al vettore $\vec{v}\,(3,2)$:

$$\boldsymbol{\frac{13\,(x-3)^2}{144}-\frac{13\,(y-2)^2}{64}=-1} \qquad \boldsymbol{52x^2-117y^2-312x+468y+576=0}$$

Calcolo l'eccentricità usando i dati dell'iperbole con centro nell'origine, visto che è uguale: $e=\frac{c}{b}=\frac{4}{\frac{8}{\sqrt{13}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{2}}$

3. Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi passante per $P\left(\frac{12}{5},3\right)$ e tale che, detto Q il punto di intersezione della tangente in P con l'asse delle x e P' il simmetrico di P rispetto all'asse delle x, il triangolo $PP'Q$ abbia area $\frac{81}{20}$.



L'equazione generica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Determino l'equazione della tangente in P all'ellisse, applicando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{12}{5}b^2x+3a^2y=a^2b^2$$

Il punto Q di intersezione della tangente con l'asse x ha coordinate: $Q\left(\frac{5}{12}a^2,0\right)$. Il triangolo PP'Q per costruzione è isoscele, con l'altezza che giace sull'asse x:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{PP'}\cdot d(Q;PP') \qquad \overline{PP'}=2y_P=6 \qquad d(Q;PP')=\frac{5}{12}a^2-\frac{12}{5}$$

Pongo l'area uguale a $\frac{81}{20}$:

$$\frac{1}{2}\overline{PP'}\cdot d(Q;PP')=\frac{81}{20} \qquad \frac{1}{2}6\cdot\left(\frac{5}{12}a^2-\frac{12}{5}\right)=\frac{81}{20}$$

$$\frac{5}{12}a^2-\frac{12}{5}=\frac{27}{20} \qquad \frac{5}{12}a^2=\frac{75}{20} \qquad a^2=9$$

L'equazione dell'ellisse è: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Sostituisco le coordinate di P nell'equazione appena determinata:

$$\frac{16}{25}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \frac{9}{b^2}=\frac{9}{25} \qquad b^2=25 \qquad \boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$$

4. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera γ riferita ai propri assi, con asse trasverso coincidente con l'asse delle x e tangente alla retta $t: 2x - y - 6 = 0$. Detto B il punto di tangenza, scrivi l'equazione della normale, n, in B all'iperbole e indica con A e C, rispettivamente, le intersezioni di t con l'asse delle x e di n con l'asse delle y. Calcola l'area del quadrilatero $OABC$.

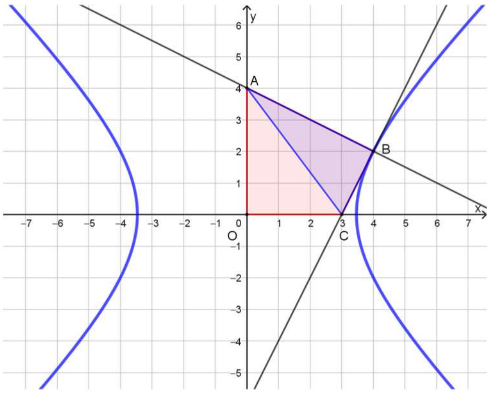
La generica equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi e con asse trasverso coincidente con l'asse delle x è: $x^2 - y^2 = a^2$. Metto a sistema la generica equazione dell'iperbole con quella della retta t e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \qquad x^2 - (2x-6)^2 = a^2 \qquad x^2 - 4x^2 + 24x - 36 - a^2 = 0 \qquad 3x^2 - 24x + 36 + a^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 12^2 - 3(36 + a^2) = 0 \qquad 48 - 36 - a^2 = 0 \qquad a^2 = 12 \qquad x^2 - y^2 = 12$$

Determino le coordinate del punto di tangenza, sostituendo il valore del parametro appena determinato nell'equazione risolvente del sistema:

$$3x^2 - 24x + 48 = 0 \qquad 3(x-4)^2 = 0 \qquad x = 4 \qquad \boldsymbol{B(4,2)}$$



La normale n in B all'iperbole è la retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza. In quanto perpendicolare alla tangente, avrà coefficiente angolare uguale all'antireciproco di quello della tangente:

$$n: y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4) \qquad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 4}$$

Determino le coordinate di A e C mettendo a sistema, rispettivamente, l'equazione di t con quella dell'asse delle x, e l'equazione di n con quella dell'asse delle y:

$$A: \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A(3,0)} \qquad C: \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C(0,4)}$$

Il quadrilatero OCBA è composto da due triangoli rettangoli, perciò: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{OC} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \qquad \overline{BC} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \overline{OC} = |3 - 0| = 3 \qquad \overline{OA} = |4 - 0| = 4$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{OC} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}3 \cdot 4 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6 + 5 = \boldsymbol{11}$$