1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\frac{18\,i^{18}+7\,i^{6}}{(2\,i^{52}+i^{53})^2} : \frac{4\,i^{36}-2\,i^{20}}{(2\,i^{8}+i^{7}-i^{20})^2}=\frac{-18-7}{(2+i)^2}:\frac{4-2}{(2-i-1)^2}=\frac{-25}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\cdot\frac{1-1-2i}{2}=-(3-4i)(-i)=\mathbf{4+3}\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{5}{6}\pi}}=\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3\cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}=\frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{i\pi}}{1+i}=\frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}=\frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{i}$$

2. Calcola il valore della seguente espressione e scrivi il risultato in forma algebrica:

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,sen\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{\cos\frac{5}{3}\pi+i\,sen\frac{5}{3}\pi}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\,sen\frac{2}{3}\pi+\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right)+i\,sen\left(-\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$$

3. Calcola $\sqrt{8-8\sqrt{3}\,i}$

$$\sqrt{8-8\sqrt{3}\,i}=\sqrt{16\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\,sen\frac{5}{3}\pi\right)}=4\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{2}+i\,sen\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{2}\right)$$

$$k=0:\qquad 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\mathbf{-2\sqrt{3}+2}\boldsymbol{i}$$

$$k=1:\qquad 4\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\mathbf{2\sqrt{3}-2}\boldsymbol{i}$$

4. Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione: $(x^2+4)(x^3-27\,i)=0$

$$x^2+4=0\qquad x^2=-4\qquad x=\pm\mathbf{2}\boldsymbol{i}$$

$$x^3-27i=0\qquad x^3=27\,i\qquad x=\sqrt[3]{27\,i}=\sqrt[3]{27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\frac{\pi}{2}\right)}=3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\,sen\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

$$k=0:\qquad 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$$

$$k=1:\qquad 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$$

$$k=2:\qquad 3\,(0-1i)=-\mathbf{3}\boldsymbol{i}$$

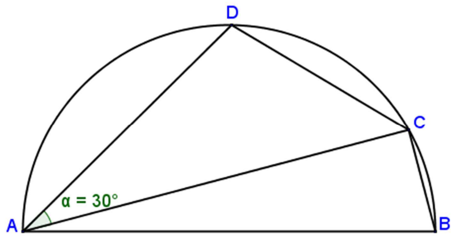
5. Applicando le formule di Eulero verifica la seguente uguaglianza:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\qquad \frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}=2\left(\frac{e^{i}+e^{-i}}{2}\right)^2-1\qquad \frac{e^{2i}+e^{-2i}+2}{2}=2\,\frac{e^{2i}+e^{-2i}+2}{4}\qquad \boldsymbol{c.v.d.}$$

6. Risolvi uno dei seguenti problemi:

In una semicirconferenza di diametro AB, che misura 2r, è inscritto un quadrilatero ABCD, tale che la diagonale AC formi con il lato AD un angolo di 30°. Discuti l'equazione seguente al variare dell'angolo $B\hat{A}C$:

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AD}+\overline{DC}}=k \qquad k\in\mathbb{R}$$



Rappresento la semicirconferenza:

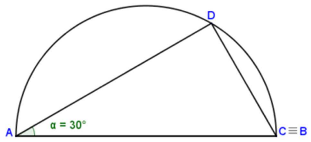
$$\overline{AB}=2r \qquad C\hat{A}D=30°$$

Pongo: $B\hat{A}C=x$ e valuto i casi limite:

$\boldsymbol{x=0}$

$$\frac{2r+0}{2r\frac{\sqrt{3}}{2}+r}=k$$

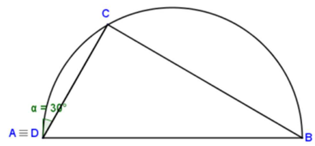
$$k=\sqrt{3}-1$$



$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{2r+r\sqrt{3}}{0+r}=k$$

$$k=\sqrt{3}+2$$



Perciò: $\boldsymbol{0\leq x\leq\frac{\pi}{3}}$.

Determiniamo l'equazione generica:

$\overline{AB}=2r$

$\overline{BC}=2r\ sen\ x$ applicando il teorema della corda, considerato che l'angolo sotteso dalla corda è proprio x

$\overline{AD}=2r\cos\ (30°+x)$ considerando il triangolo rettangolo ADB con ipotenusa AB

$\overline{DC}=2r\ sen\ 30°=r$ applicando il teorema della corda, considerato che l'angolo sotteso dalla corda è 30°

$$\frac{2r+2r\ sen\ x}{2r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\ x-\frac{1}{2}sen\ x\right)+r}=k \qquad \frac{2+2\ sen\ x}{\sqrt{3}\cos x-sen\ x+1}=k$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases}2+2\ sen\ x=k\left(\sqrt{3}\cos x-sen\ x+1\right)\\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

Ovvero:

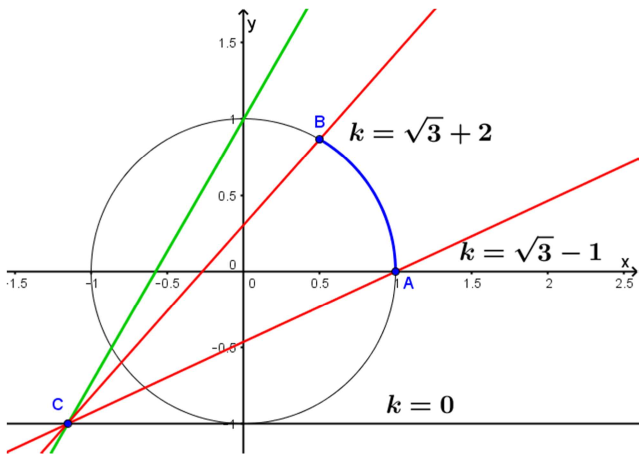
$$\begin{cases}(2+k)\,Y-kX\sqrt{3}=k-2\\ X^2+Y^2=1\\ \frac{1}{2}\leq X\leq 1;\ \ 0\leq Y\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Il fascio è proprio e di centro $C\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3};\ -1\right)$.

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A(1;0):\quad -k\sqrt{3}=k-2 \quad\Longrightarrow\quad k=\sqrt{3}-1$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\quad \sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}k-\frac{\sqrt{3}}{2}k=k-2 \quad\Longrightarrow\quad k=2+\sqrt{3}$$

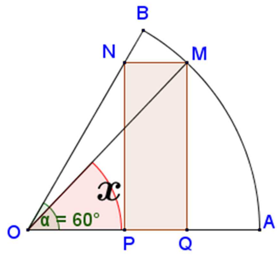


Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ \ \sqrt{3}-1\leq k\leq 2+\sqrt{3}}$$

Nel settore circolare AOB di raggio r, centro O e angolo di apertura 60°, è inscritto il rettangolo MNPQ che ha il vertice M sull'arco AB, il vertice N sul raggio OB e il lato PQ su OA. Ponendo l'angolo $A\hat{O}M = x$, discuti l'equazione:

$$Area_{PQMN} = kr^2 \qquad k \in \mathbb{R}$$



Rappresento l'arco di circonferenza:

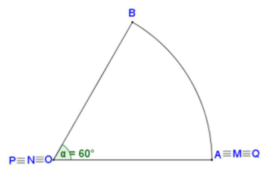
$$\overline{AO} = r \qquad A\hat{O}B = 60°$$

Pongo: $A\hat{O}M = x$ e valuto i casi limite:

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$0r^2 = kr^2$$

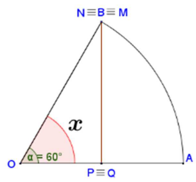
$$k = 0$$



$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$0r^2 = kr^2$$

$$k = 0$$



Perciò: $\boldsymbol{0 \le x \le \frac{\pi}{3}}$

Determiniamo l'equazione generica, data dal prodotto tra PQ e MQ.

$\overline{MQ} = r\ sen\ x$ considerando il triangolo rettangolo OQM con ipotenusa OM, il raggio

$\overline{NP} = \overline{ON}\ sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{ON} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{ON} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\overline{NP} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\overline{MQ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r\ sen\ x$

$\overline{OQ} = r\cos\ x$ considerando il triangolo rettangolo OQM con ipotenusa OM, il raggio

$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = r\cos x - \overline{ON}\cos\frac{\pi}{3} = r\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}r\ sen\ x$

A questo punto possiamo determinare l'area:

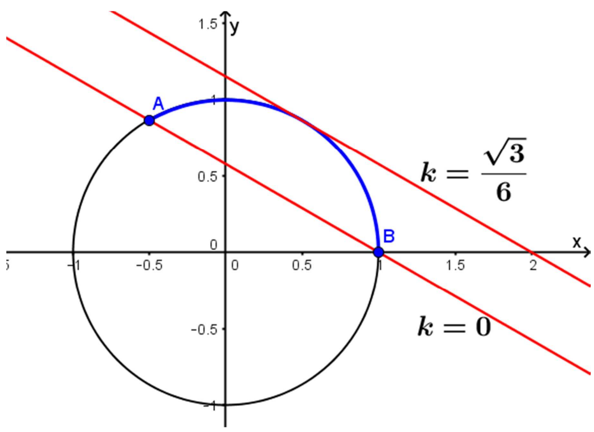
$$r\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\ sen\ x\right)r\ sen\ x = kr^2 \qquad 3\ \cos x\ \ sen\ x - \sqrt{3}\ sen^2 x = 3\ k$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} sen\ 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = \sqrt{3}\ k \\ 0 \le 2x \le \frac{2}{3}\ \pi \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\ Y + X = 2\sqrt{3}\ k + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -\frac{1}{2} \le X \le 1;\ \ 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$



Il fascio è improprio.

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right):\ \ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}\ k + 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 0$$

$$B(1;0):\ \ 1 = 2\sqrt{3}\ k + 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 0$$

Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$\frac{|2\sqrt{3}\ k + 1|}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{3}\ k + 1 = \pm 2 \quad la\ tangente\ cercata\ si\ ottiene\ per\ un\ valore\ positivo\text{:} \qquad k = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ \ 0 \le k \le \frac{\sqrt{3}}{6}}$$