1. Determina l'equazione della funzione omografica passante per i punti $A\,(-3;11)$ e $B\,(-2;4)$ e con asintoto verticale $x=-4$.

Considerata la funzione omografica: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, con asintoto verticale $x=-\frac{d}{c}$, procedo raccogliendo c sia a numeratore che a denominatore:

$$y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}} \qquad sostituendo\ -\frac{d}{c}=-4 \qquad y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+4}$$

Per determinare gli ultimi parametri, impongo il passaggio dell'iperbole per i punti A e B, sostituendo le loro coordinate nell'espressione della funzione e risolvendo poi il sistema:

$$\begin{cases} 11=\dfrac{-3\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}{-3+4} \\ 4=\dfrac{-2\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}{-2+4} \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=11 \\ -2\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=8 \end{cases} \ \Rightarrow\ \frac{a}{c}=-3 \qquad \begin{cases} \frac{a}{c}=-3 \\ \frac{b}{c}=2 \end{cases}$$

Perciò l'equazione dell'iperbole è:

$$\boldsymbol{y=\frac{-3x+2}{x+4}}$$

2. Trova l'equazione dell'ellisse che ha un vertice di coordinate $(-4;0)$ e il fuoco sull'asse x di ascissa positiva distante $\sqrt{13}$ dalla retta di equazione $3x-2y+4=0$.

Il fuoco dell'ellisse ha coordinate: $F\,(c;0)$. Pongo la sua distanza dalla retta data uguale a $\sqrt{13}$:

$$\frac{|\,3c+4\,|}{\sqrt{9+4}}=\sqrt{13} \qquad |\,3c+4\,|=13$$

Da cui ricaviamo due equazioni:

$$3c+4=13 \qquad c=3$$

$$3c+4=-13 \qquad c=-\frac{17}{3} \qquad non\ accettabile$$

Perciò dell'ellisse conosco:

$$a=4 \qquad c=3 \qquad a^2-b^2=c^2 \ \Rightarrow\ b^2=a^2-c^2=7$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1}$$

3. Determina e rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze dai punti $F_1(1;2)$, $F_2(7;2)$ è uguale a 4.

Il luogo geometrico richiesto è un'iperbole con centro di simmetria dato dal punto medio del segmento F_1F_2. Determino perciò l'iperbole di centro O, di cui conosco la distanza focale e l'asse trasverso, con i fuochi sull'asse x:

$$2c = F_1F_2 = 6 \qquad 2a = 4 \qquad a^2 + b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; b^2 = c^2 - a^2 = 5$$

L'iperbole di centro O ha equazione:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

A questo punto, conoscendo il centro di simmetria del luogo richiesto $O'(4;2)$, traslo l'iperbole in modo che abbia centro coincidente con quello dato:

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \qquad \mathbf{5x^2 - 4y^2 - 40x + 16y + 44 = 0}$$

In alternativa, posso determinare l'equazione richiesta applicando la definizione di luogo geometrico, ovvero:

$$PF_1 - PF_2 = 4$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 4$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} + 4\right)^2$$

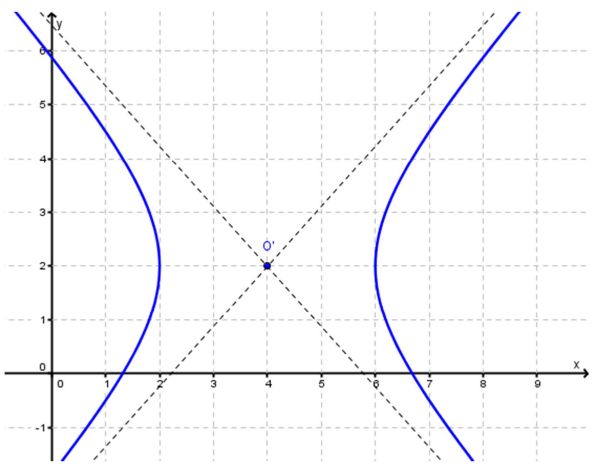
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 + 16 + 8\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2}$$

$$12x - 64 = 8\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2}$$

$$(3x - 16)^2 = \left(2\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2 + 256 - 96x = 4x^2 - 56x + 196 + 4y^2 - 16y + 16$$

$$\mathbf{5x^2 - 4y^2 - 40x + 16y + 44 = 0}$$



4. Determina l'equazione dell'iperbole di fuoco $\left(0;\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e tangente alla retta $2x-6y+5=0$.

Conoscendo il fuoco dell'iperbole, so che: $a^2+b^2=\frac{5}{4}$. Impongo la condizione di tangenza, data l'iperbole generica, ponendo Δ=0 nella risolvente del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \\ 2x-6y+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{5}{4}-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \\ x=3y-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{9y^2-15y+\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad \frac{36y^2-60y+25}{5-4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$$36\,b^2y^2-60\,b^2y+25b^2-5\,y^2+4b^2y^2+5b^2-4b^4=0$$

$$y^2\,(40\,b^2-5)-60\,b^2y-4b^4+30\,b^2=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=30^2\,b^4+(40\,b^2-5)(4\,b^4-30\,b^2)=0$$

$$30^2b^4+10\,b^2\,(8b^2-1)(2b^2-15)=0$$

$$90\,b^2+16b^4-120\,b^2-2b^2+15=0$$

$$16\,b^4-32\,b^2+15=0$$

$$b^2=\frac{16\pm\sqrt{16^2-16\cdot 15}}{16}=\frac{4\pm 1}{4}=\left\langle \begin{array}{l}\frac{5}{4}\\ \frac{3}{4}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} b^2=\frac{5}{4} \\ a^2=\frac{5}{4}-b^2=0 \end{cases} \qquad non\ accettabile$$

$$\begin{cases} b^2=\frac{3}{4} \\ a^2=\frac{5}{4}-b^2=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=-1 \qquad 2x^2-\frac{4}{3}y^2=-1 \qquad \mathbf{4y^2-6x^2=3}$$

5. Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, siano AB l'asse maggiore, O il suo centro e F il fuoco di ordinata positiva. Sia P il punto dell'ellisse di ordinata 3 del primo quadrante e sia CD una corda passante per O parallela alla tangente all'ellisse in P. La retta PF e la retta CD si incontrano in Q. Determina il rapporto fra le lunghezze di PQ e OA.

Dall'equazione dell'ellisse ricavo:

$$A\ (0,-5) \qquad B\ (0,5) \qquad F\ (0,4)$$

Ricavo le coordinate di P, sostituendo l'ordinata 3 nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{9}{25}=1 \qquad \frac{x^2}{9}=\frac{16}{25} \qquad x=\pm\frac{12}{5}$$

Il punto P ha coordinate $P\ \left(\frac{12}{5},3\right)$.
Determino la tangente in P con la formula dello sdoppiamento:

$$\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{9}x+\frac{3}{25}y=1 \qquad 20x+9y=75$$

Perciò la retta passante per O e parallela alla tangente all'ellisse in P ha equazione: $y=-\frac{20}{9}x$.
Determino l'equazione della retta PF:

$$\frac{x-0}{\frac{12}{5}-0}=\frac{y-4}{3-4} \qquad \frac{5}{12}x=-y+4 \qquad y=-\frac{5}{12}x+4$$

Determino l'intersezione tra la retta CD e la retta PF

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{12}x+4 \\ y=-\frac{20}{9}x \end{cases} \qquad \frac{20}{9}x-\frac{5}{12}x=-4 \qquad 80x-15x=-144 \qquad x=-\frac{144}{65}$$

Perciò il punto Q ha coordinate:

$$Q\ \left(-\frac{144}{65};\frac{64}{13}\right)$$

Posso calcolare il rapporto richiesto:

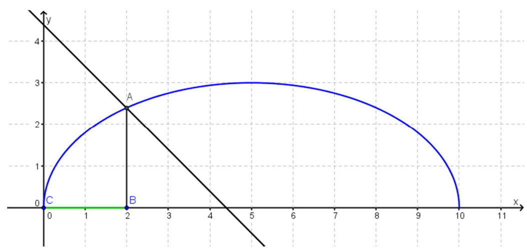
$$\frac{PQ}{OA}=\frac{\sqrt{\left(\frac{12}{5}+\frac{144}{65}\right)^2+\left(3-\frac{64}{13}\right)^2}}{5}=\frac{\sqrt{\left(\frac{300}{65}\right)^2+\left(\frac{25}{13}\right)^2}}{5}=\frac{\frac{5}{13}\sqrt{12^2+5^2}}{5}=\frac{\frac{5}{13}\cdot 13}{5}=\mathbf{1}$$

6. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $3\sqrt{1-\frac{(x-5)^2}{25}}<\frac{22}{5}-x$.

Considero l'arco di ellisse traslata e la retta di equazione, rispettivamente:

$$y=3\sqrt{1-\frac{(x-5)^2}{25}} \qquad y=\frac{22}{5}-x$$

L'arco di ellisse è dato dalla ellisse di centro $(5,0)$ e assi di lunghezza 10 e 6, ma ne considero solo la parte superiore. Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione A di ascissa 2. La soluzione è indicata in verde nel disegno:



$$\mathbf{0\le x<2}$$

7. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:

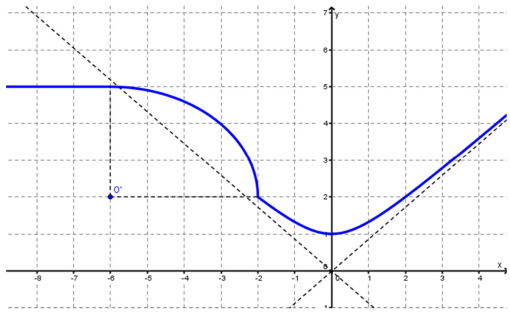
La prima è una retta parallela all'asse x di equazione: $y = 5$.

La seconda è un arco di ellisse di centro $O'(-6; 2)$, semiasse maggiore 4 e semiasse minore 3:

$$\frac{(x+6)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$(y-2)^2 = 9\left(1 - \frac{(x+6)^2}{16}\right)$$

$$y = 2 + \frac{3}{4}\sqrt{-20 - x^2 - 12\,x}$$



La terza è un arco di iperbole di vertice reale $(0; 1)$ e passante per il punto $(-2; 2)$, perciò dall'equazione generica:

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = -1$$

sostituisco le coordinate del punto per determinare l'equazione:

$$\frac{4}{a^2} - 4 = -1 \qquad \frac{4}{a^2} = 3 \qquad a^2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3x^2}{4} - y^2 = -1 \qquad y^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1 \qquad y = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} 5 & x \le -6 \\ 2 + \frac{3}{4}\sqrt{-20 - x^2 - 12x} & -6 < x \le -2 \\ \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1} & x > -2 \end{cases}}$$