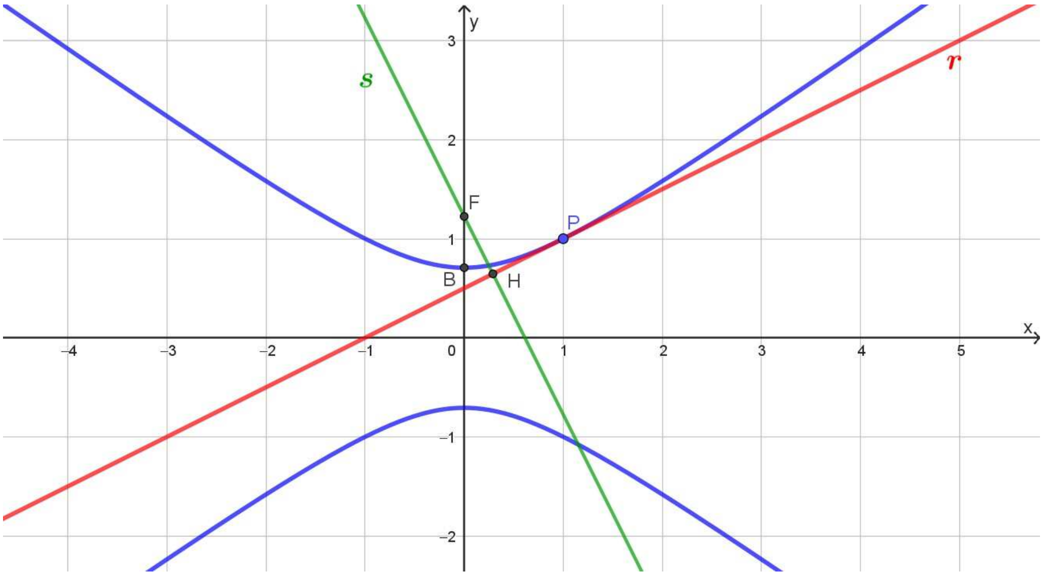
1. Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi, con l'asse trasverso coincidente con quello delle y, passante per $P(1,1)$ e di eccentricità $e=\sqrt{3}$. Sia r la retta tangente all'iperbole in P ed s la perpendicolare ad r passante per il fuoco di ordinata positiva. Detto H il punto d'intersezione fra r ed s, verifica che $OH \cong OB$, essendo B il vertice dell'iperbole di ordinata positiva.



Un'iperbole riferita ai propri assi e con asse trasverso coincidente con quello delle y ha equazione generica: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ e eccentricità: $\frac{c}{b}$. Perciò, usando il valore dell'eccentricità, ricordando che $c=\sqrt{a^2+b^2}$ e sostituendo le coordinate del punto P nell'equazione generica dell'iperbole, imposto il sistema:

$$\begin{cases}\frac{c^2}{b^2}=3\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}a^2=2b^2\\ \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}a^2=1\\ b^2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

L'equazione dell'iperbole richiesta è: $\boldsymbol{x^2-2y^2=-1}$.

Determino l'equazione della retta tangente in P, r, usando la formula di sdoppiamento, $\frac{x\,x_P}{a^2}-\frac{y\,y_P}{b^2}=-1$:

$$\boldsymbol{r:\ x-2y+1=0}$$

Determino le coordinate del punto di ordinata positiva, ricordando che $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ e ricordando che le coordinate dei fuochi sono date da $F_{1,2}(0,\pm c)$, determino l'equazione della retta s passante per il fuoco $F\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e perpendicolare a r, cioè con coefficiente angolare che è pari al suo antireciproco, quindi $m_r=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_s=-2$:

$$y-\frac{\sqrt{6}}{2}=-2x \qquad\qquad \boldsymbol{s: 4x+2y-\sqrt{6}=0}$$

Determino le coordinate di H, punto di intersezione tra le due rette:

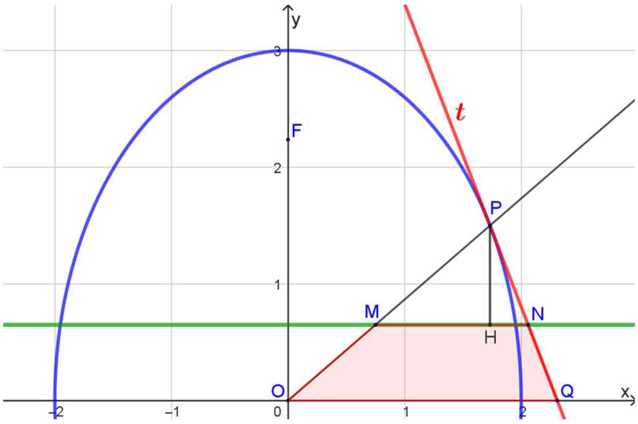
$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ 4x+2y-\sqrt{6}=0\end{cases} \quad \overline{5x+1-\sqrt{6}=0} \qquad \begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}-1}{5}\\ \sqrt{6}-1-10y+5=0\end{cases} \qquad H\left(\frac{\sqrt{6}-1}{5};\frac{\sqrt{6}+4}{10}\right)$$

Sapendo che il vertice reale con ordinata positiva ha coordinate $B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, verifico che $OH \cong OB$:

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-1}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}+4}{10}\right)^2}=\frac{1}{10}\sqrt{24+4-8\sqrt{6}+6+16+8\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OB}=\sqrt{0+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{OH} \qquad\qquad c.v.d.$$

2. Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi avente un fuoco in $F(0,\sqrt{5})$ e passante per $P\left(\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$. Sia t la retta tangente alla curva in P e Q il punto in cui t interseca l'asse delle x. Conduci una retta parallela all'asse x posta nel semipiano $y \geq 0$, che interseca OP in M e t in N in modo che l'area del trapezio OMNQ sia $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.



La generica equazione dell'ellisse riferita ai propri assi è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Impongo il passaggio per P, sostituendo le coordinate di P nell'equazione generica e uso l'ordinata del fuoco, sapendo che, nel caso di ellisse con i fuochi sull'asse y, $c=\sqrt{b^2-a^2}$:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1 \\ c=\sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 12\,b^2+9a^2=4a^2b^2 \\ b^2-a^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=a^2+5 \\ 12a^2+60+9a^2=4a^4+20a^2 \end{cases} \qquad 4a^4-a^2-60=0$$

$$a^2_{1,2}=\frac{1\pm 31}{8}=\left\langle \begin{matrix} 4 \\ \left[-\frac{30}{8}\right] \end{matrix}\right. \qquad \boldsymbol{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}$$

Ottenuta l'equazione dell'ellisse, applico la formula di sdoppiamento $\frac{x\,x_P}{a^2}+\frac{y\,y_P}{b^2}=1$ per determinare l'equazione della tangente t in P:

$$\frac{x\sqrt{3}}{4}+\frac{3y}{2\cdot 9}=1 \qquad \boldsymbol{t\text{: } 3x\sqrt{3}+2y-12=0}$$

Il punto di intersezione con l'asse x ha coordinate: $Q\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},0\right)$, perciò il triangolo OQP ha area:

$$\mathcal{A}_{OQP}=\frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot h_{OQP}=\frac{1}{2}\cdot x_Q\cdot y_P=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\sqrt{3}$$

Dato che l'area del trapezio OMNQ è pari a $\frac{8}{9}\sqrt{3}$, per differenza l'area del triangolo MNP è: $\sqrt{3}-\frac{8}{9}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.
Perciò uso l'area del triangolo MNP, per determinare l'equazione della retta parallela all'asse x: $y=h$, usando la similitudine.
La distanza di P da tale retta è: $\overline{PH}=\left|\frac{3}{2}-h\right|$ e posso togliere il valore assoluto, considerando le condizioni poste dal testo:

$$0\leq h\leq\frac{3}{2}\text{:}\quad \overline{PH}=\frac{3}{2}-h$$

Dato che i due triangoli OQP e MNP sono simili:

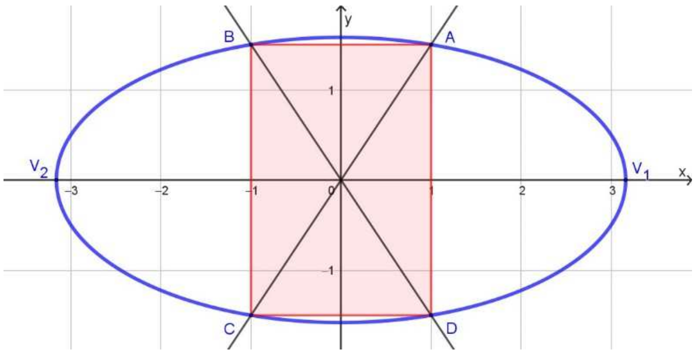
$$\mathcal{A}_{OQP}:\mathcal{A}_{MNP}=\left(h_{OQP}\right)^2:\left(h_{MNP}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad h_{MNP}=h_{OQP}\cdot\sqrt{\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{OQP}}}=\frac{1}{3}h_{OQP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\frac{3}{2}-h=\frac{1}{2} \qquad h=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

La retta richiesta ha equazione $\boldsymbol{y=1}$.

3. Le rette di equazioni $y = \pm\frac{3}{2}x$ intersecano l'ellisse in quattro punti che formano un rettangolo di perimetro 10. Determina l'equazione dell'ellisse sapendo che ha due vertici nei punti di coordinate $\left(\pm\sqrt{10}, 0\right)$.



La generica equazione dell'ellisse è: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Avendo per vertici i punti di coordinate $\left(\pm\sqrt{10}, 0\right)$, $a = \sqrt{10}$ e l'ellisse ha equazione generica: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
I punti di intersezione tra l'ellisse e le rette date hanno coordinate: $(2h, 3h)$, $(-2h, 3h)$, $(-2h, -3h)$ e $(2h, -3h)$, perciò, le dimensioni del rettangolo sono: $4h$ e $6h$, quindi:

$$2\,(4h + 6h) = 10 \qquad h = \frac{1}{2}$$

Basta, quindi, imporre il passaggio dell'ellisse per il punto: $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, ovvero sostituire le coordinate del punto nella generica equazione dell'ellisse, per determinare il parametro b:

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{4b^2} = 1 \qquad \frac{9}{4b^2} = \frac{9}{10} \qquad b^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

L'equazione richiesta è: $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ $\qquad$ $\boldsymbol{x^2 + 4y^2 = 10}$

4. Considera l'iperbole γ_1 avente vertici in $\left(\pm\sqrt{6}, 0\right)$ e fuochi in $\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$.
   A. Scrivi l'equazione di γ_1.
   B. Determina il punto P di γ_1, appartenente al primo quadrante, di ordinata 1.
   C. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera γ_2 riferita ai propri assi e passante per P.
   D. Scrivi l'equazione della retta r tangente a γ_2 e passante per P.
   E. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera γ_3 riferita ai propri asintoti e tangente alla retta r.

A. L'iperbole ha generica equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a = \sqrt{6}$ (dato dalle coordinate dei vertici) e:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 6 + b^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma_1\colon\ x^2 - 3y^2 = 6}$$

B. Determino le coordinate di P, sostituendo l'ordinata 1: $x^2 - 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(3; 1)}$.

C. L'iperbole equilatera riferita ai propri assi ha generica equazione $x^2 - y^2 = \pm a^2$. Sostituendo le coordinate di P, ottengo:

$$9 - 1 = 8 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma_2\colon\ x^2 - y^2 = 8}$$

D. Per determinare l'equazione della retta r, tangente a γ_2 e passante per P, applico la formula di sdoppiamento $xx_P - yy_P = a^2$:

$$3x - y = 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r\colon\ 3x - y - 8 = 0}$$

E. L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha generica equazione $xy = k$. Metto a sistema la generica equazione con l'equazione della retta r e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} xy = k \\ y = 3x - 8 \end{cases} \qquad x(3x - 8) - k = 0 \qquad 3x^2 - 8x - k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16 + 3k = 0 \qquad k = -\frac{16}{3} \qquad \boldsymbol{\gamma_3\colon\ xy = -\frac{16}{3}}$$