1. Scrivi l'equazione dell'ellisse avente per fuochi i punti $(-4\sqrt{2}; 3)$ e $(4\sqrt{2}; 3)$ e passante per il punto $(3\sqrt{3}; 4)$.

Determino il centro di simmetria dell'ellisse, O', punto medio dei due fuochi, ovvero $O'(0; 3)$, perciò la generica equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

Oltre all'equazione ottenuta imponendo il passaggio dell'ellisse per il punto dato, abbiamo anche:

$$2c = F_1F_2 = 8\sqrt{2} \qquad c = 4\sqrt{2} \qquad a^2 - b^2 = c^2 \ \Rightarrow \ a^2 = 32 + b^2$$

Perciò la generica equazione è:

$$\frac{x^2}{32 + b^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

Impongo il passaggio dell'ellisse per il punto dato, sostituendo le equazioni del punto nell'equazione generica:

$$\frac{27}{32 + b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \qquad 27\, b^2 + 32 + b^2 = 32b^2 + b^4 \qquad b^4 + 4b^2 - 32 = 0$$

$$b^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{1} = -2 \pm 6 = \left\langle \begin{matrix} [-8] \\ 4 \end{matrix} \right.$$

Ora abbiamo l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \qquad \boldsymbol{x^2 + 9y^2 - 54\, y - 63 = 0}$$

2. Determina i valori di k per cui la retta di equazione $y = x + k$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ hanno punti in comune.

Perché l'ellisse e la retta abbiano punti in comune, devo mettere a sistema le due equazioni e porre $\Delta \geq 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x + k \end{cases} \qquad 4x^2 + 25\,(x+k)^2 = 100$$

$$4x^2 + 25x^2 + 50kx + 25k^2 - 100 = 0$$

$$29\, x^2 + 50\, kx + 25\, k^2 - 100 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 25^2k^2 - 29\,(25\, k^2 - 100) \geq 0$$

$$25\, k^2 - 29\, k^2 + 108 \geq 0 \qquad 4\, k^2 - 108 \leq 0 \qquad k^2 - 29 \leq 0 \qquad \boldsymbol{-\sqrt{29} \leq k \leq \sqrt{29}}$$

3. È data l'equazione $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{(k+2)^2}=1$. Determina i valori del parametro k per i quali essa rappresenta un'ellisse.

   A. Per quali valori di k i fuochi sono sull'asse y?

   B. Per quali valori di k i fuochi sono sull'asse x?

   C. Determina il valore di k in modo che una delle tangenti all'ellisse abbia equazione $y=-3$.

   D. Determina il valore di k in modo che l'area delimitata dall'ellisse sia uguale a quella di un cerchio di raggio $\sqrt{15}$.

   E. Determina il valore di k in modo che l'equazione data rappresenti una circonferenza.

Considerato che i denominatori dell'equazione sono sicuramente positivi, in quanto elevati al quadrato, dobbiamo solo imporre che siano diversi da zero, ovvero:

$$\boldsymbol{k \neq 0} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq -2}$$

A. Perché i fuochi dell'ellisse siano sull'asse y:

$$k^2 < (k+2)^2 \qquad k^2 < k^2+4k+4 \qquad \boldsymbol{k > -1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq 0}$$

B. Perché i fuochi dell'ellisse siano sull'asse x:

$$k^2 > (k+2)^2 \qquad k^2 > k^2+4k+4 \qquad \boldsymbol{k < -1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq -2}$$

C. L'ellisse ha per tangente una retta parallela all'asse x proprio nel vertice dell'asse y, perciò:

$$(k+2)^2 = 9 \qquad k+2 = \pm 3 \qquad \boldsymbol{k = 1} \quad \vee \quad \boldsymbol{k = -5}$$

D. Pongo l'area dell'ellisse equivalente a quella della circonferenza data:

$$\pi\sqrt{k^2}\sqrt{(k+2)^2} = 15\,\pi \qquad k\,(k+2) = \pm 15$$

$$k^2+2k+15=0 \qquad \boldsymbol{impossibile}$$

$$k^2+2k-15=0 \qquad k=\frac{-1\pm 4}{1} \qquad \boldsymbol{k=-5} \quad \vee \quad \boldsymbol{k=3}$$

E. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due denominatori devono essere uguali:

$$k = k+2 \qquad \boldsymbol{impossibile}$$

$$k = -k-2 \qquad \boldsymbol{k=-1}$$

4. Un'iperbole, riferita al centro e agli assi, passa per i punti $A\ (5;2)$ e $B\ (7;3)$ e ha i fuochi sull'asse x. Scrivi l'equazione dell'iperbole e verifica che non esiste un'iperbole, riferita al centro e agli assi e con i fuochi sull'asse y, passante per A e per B.

La generica equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Più comodamente, per i calcoli, la posso scrivere: $Ax^2-By^2=1$. Sostituisco in quest'ultima equazione le coordinate dei punti A e B, che appartenendo all'iperbole rendono la sua equazione un'identità, e risolvo il sistema:

$$\begin{cases}25\,A-4\,B=1\\49\,A-9\,B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}24\,A-5B=0\\25\,A-4\,B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=\dfrac{5}{24}B\\125\,B-96\,B=24\end{cases}$$

$$\begin{cases}29\,B=24\\A=\dfrac{5}{24}B\end{cases}\qquad\begin{cases}A=\dfrac{5}{29}\\B=\dfrac{24}{29}\end{cases}\qquad\mathbf{5\,x^2-24\,y^2=29}$$

Se i fuochi fossero sull'asse y, il sistema diventerebbe:

$$\begin{cases}25\,A-4\,B=-1\\49\,A-9\,B=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}24\,A-5B=0\\25\,A-4\,B=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=\dfrac{5}{24}B\\125\,B-96\,B=-24\end{cases}$$

In altre parole B avrebbe una soluzione negativa, ma B è il quadrato del reciproco di b, perciò non può essere. In altre parole, il sistema è impossibile.

5. Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $xy=-2$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

Dopo aver determinato l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'iperbole, posso applicare la formula di sdoppiamento:

$$\frac{1}{2}y=-2\qquad y=-4\qquad P\left(\frac{1}{2};-4\right)$$

$$\frac{x_Py+xy_P}{2}=-2\qquad\frac{1}{2}y-4x=-4\qquad\mathbf{y=8x-8}$$

In alternativa, posso determinare l'equazione del fascio di rette centrato in P, metterla a sistema con l'equazione dell'iperbole e porre $\Delta=0$ nell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases}xy=-2\\y+4=m\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\qquad x\left(mx-\frac{1}{2}m-4\right)=-2\qquad mx^2-x\left(\frac{1}{2}m+4\right)+2=0$$

$$\Delta=\left(\frac{1}{2}m+4\right)^2-8m=0$$

$$\frac{1}{4}m^2+16+4m-8m=0$$

$$\frac{1}{4}m^2-4m+16=0\qquad\left(\frac{1}{2}m-4\right)^2=0\qquad m=8\qquad\mathbf{y=8x-8}$$

6. Un'iperbole, riferita al centro O e agli assi, ha un fuoco nel punto $F\ (5;0)$ e un vertice in $A\ (4;0)$.
   A. Scrivi l'equazione dell'iperbole.
   B. Scrivi l'equazione della tangente t all'iperbole nel suo punto B di ascissa $\frac{20}{3}$ e di ordinata positiva.
   C. Sia s la perpendicolare alla tangente t condotta per F e sia H il punto di intersezione tra s e t. Verifica che i segmenti OH e OA sono congruenti.

A. Dati il fuoco e il vertice, posso determinare tutti i parametri dell'ellisse:

$$\begin{cases} c=5 \\ a=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ a=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2=9 \\ a=4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$$

B. Data l'ascissa di B, determino la sua ordinata, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'iperbole:

$$\frac{20^2}{9}\cdot\frac{1}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad \frac{y^2}{9}=\frac{25}{9}-1 \qquad y^2=16 \qquad y=\pm 4$$

Visto che B deve avere ordinata positiva, le coordinate di B sono: $\boldsymbol{B\left(\frac{20}{3};4\right)}$.

Determino l'equazione della tangente t all'iperbole applicando la regola di sdoppiamento:

$$\frac{20}{3}\frac{x}{16}-\frac{4y}{9}=1 \qquad \frac{5}{12}x-\frac{4}{9}y=1 \qquad t\colon \boldsymbol{y=\frac{15}{16}x-\frac{9}{4}}$$

C. La retta s è perpendicolare a t e passa per il fuoco F:

$$y-0=-\frac{16}{15}(x-5) \qquad s\colon \boldsymbol{y=-\frac{16}{15}x+\frac{16}{3}}$$

Trovo il punto di intersezione tra s e t (H), mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 15\,x-16\,y-36=0 \\ 16\,x+15\,y-80=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15\cdot 16\,x-256\,y-36\cdot 16=0 \\ 15\cdot 16\,x+225\,y-80\cdot 15=0 \end{cases}$$

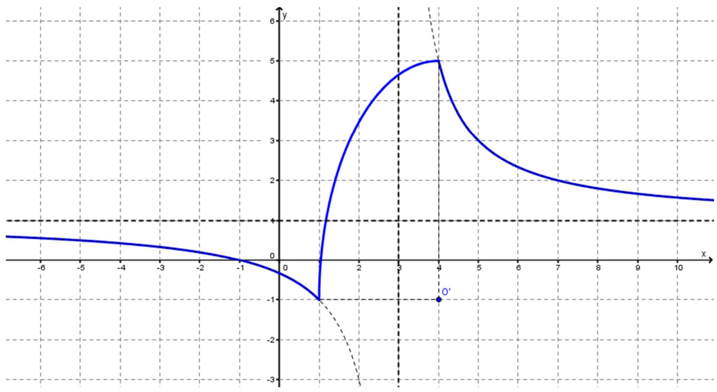
$$\begin{cases} -481\,y=3\cdot 8\cdot(24-50) \\ 15\,x-16\,y-36=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{48}{37} \\ 5\,x-16\cdot\dfrac{16}{37}-12=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{140}{37} \\ y=\dfrac{48}{37} \end{cases}$$

Determino la lunghezza del segmento OH, mentre il segmento OA è facilmente calcolabile ed è lungo **4**.

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{140}{37}\right)^2+\left(\frac{48}{37}\right)^2}=\frac{4}{37}\sqrt{35^2+12^2}=\frac{4}{37}\sqrt{1225+144}=\frac{4}{37}\sqrt{1369}=\boldsymbol{4}$$

I due segmenti sono effettivamente congruenti.

7. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:



Cominciamo dalla funzione omografica di asintoti $x = 3$ e $y = 1$, passante per il punto $(1;\ -1)$, perciò:

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{x + \frac{b}{c}}{x - 3}$$

Sostituendo le coordinate del punto:

$$-1 = \frac{1 + \frac{b}{c}}{1 - 3} \qquad \frac{b}{c} = 1$$

$$\boldsymbol{y = \frac{x + 1}{x - 3}}$$

Considero poi l'arco di ellisse traslata, di centro di simmetria $O'(4;\ -1)$ e di semiassi rispettivamente 3 e 6:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1 \qquad (y+1)^2 = 36 - 4\,(x-4)^2 \qquad y = -1 + 2\sqrt{8x - x^2 - 7}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} & x \le 1 \ \vee \ x \ge 4 \\ -1 + 2\sqrt{8x - x^2 - 7} & 1 < x < 4 \end{cases}}$$