1. Scrivi l'equazione dell'ellisse avente per fuochi i punti $(-2\sqrt{7};3)$ e $(2\sqrt{7};3)$ e passante per il punto $(2\sqrt{6};4)$.

Determino il centro di simmetria dell'ellisse, O', punto medio dei due fuochi, ovvero $O'(0;3)$, perciò la generica equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$$

Oltre all'equazione ottenuta imponendo il passaggio dell'ellisse per il punto dato, abbiamo anche:

$$2c=F_1F_2=4\sqrt{7} \qquad c=2\sqrt{7} \qquad a^2-b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2=28+b^2$$

Perciò la generica equazione è:

$$\frac{x^2}{28+b^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$$

Impongo il passaggio dell'ellisse per il punto dato, sostituendo le equazioni del punto nell'equazione generica:

$$\frac{24}{28+b^2}+\frac{1}{b^2}=1 \qquad 24\,b^2+28+b^2=28\,b^2+b^4 \qquad b^4+3b^2-28=0$$

$$b^2=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{2}=\frac{-3\pm 11}{2}=\left\langle \begin{matrix}[-7]\\ 4\end{matrix}\right.$$

Ora abbiamo l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{32}+\frac{(y-3)^2}{4}=1 \qquad \boldsymbol{x^2+8y^2-48\,y+40=0}$$

2. Determina i valori di k per cui la retta di equazione $y=x+k$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ hanno punti in comune.

Perché l'ellisse e la retta abbiano punti in comune, devo mettere a sistema le due equazioni e porre $\Delta\geq 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1\\ y=x+k\end{cases} \qquad 25x^2+4\,(x+k)^2=100$$

$$25x^2+4x^2+8kx+4k^2-100=0$$

$$29\,x^2+8\,kx+4\,k^2-100=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4^2k^2-29\,(4\,k^2-100)\geq 0$$

$$4\,k^2-29\,k^2+29\cdot 25\geq 0 \qquad 25\,k^2-29\cdot 25\leq 0 \qquad k^2-29\leq 0 \qquad \boldsymbol{-\sqrt{29}\leq k\leq\sqrt{29}}$$

3. È data l'equazione $\frac{x^2}{(k+2)^2}+\frac{y^2}{k^2}=1$. Determina i valori del parametro k per i quali essa rappresenta un'ellisse.
   A. Per quali valori di k i fuochi sono sull'asse y?
   B. Per quali valori di k i fuochi sono sull'asse x?
   C. Determina il valore di k in modo che una delle tangenti all'ellisse abbia equazione $x=-4$.
   D. Determina il valore di k in modo che l'area delimitata dall'ellisse sia uguale a quella di un cerchio di raggio $\sqrt{15}$.
   E. Determina il valore di k in modo che l'equazione data rappresenti una circonferenza.

Considerato che i denominatori dell'equazione sono sicuramente positivi, in quanto elevati al quadrato, dobbiamo solo imporre che siano diversi da zero, ovvero:

$$\boldsymbol{k \neq 0} \qquad \wedge \qquad \boldsymbol{k \neq -2}$$

A. Perché i fuochi dell'ellisse siano sull'asse y:

$$(k+2)^2 < k^2 \qquad k^2+4k+4 < k^2 \qquad \boldsymbol{k < -1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq -2}$$

B. Perché i fuochi dell'ellisse siano sull'asse x:

$$(k+2)^2 > k^2 \qquad k^2+4k+4 > k^2 4 \qquad \boldsymbol{k > -1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k \neq 0}$$

C. L'ellisse ha per tangente una retta parallela all'asse y proprio nel vertice dell'asse x, perciò:

$$(k+2)^2 = 16 \qquad k+2 = \pm 4 \qquad \boldsymbol{k = 2} \quad \vee \quad \boldsymbol{k = -6}$$

D. Pongo l'area dell'ellisse equivalente a quella della circonferenza data:

$$\pi\sqrt{k^2}\sqrt{(k+2)^2} = 15\,\pi \qquad k\,(k+2) = \pm 15$$

$$k^2+2k+15 = 0 \qquad \boldsymbol{impossibile}$$

$$k^2+2k-15 = 0 \qquad k = \frac{-1 \pm 4}{1} \qquad \boldsymbol{k = -5} \quad \vee \quad \boldsymbol{k = 3}$$

E. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due denominatori devono essere uguali:

$$k = k+2 \qquad \boldsymbol{impossibile}$$

$$k = -k-2 \qquad \boldsymbol{k = -1}$$

4. Un'iperbole, riferita al centro e agli assi, passa per i punti $A\ (2;5)$ e $B\ (3;7)$ e ha i fuochi sull'asse y. Scrivi l'equazione dell'iperbole e verifica che non esiste un'iperbole, riferita al centro e agli assi e con i fuochi sull'asse x, passante per A e per B.

La generica equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Più comodamente, per i calcoli, la posso scrivere: $Ax^2-By^2=-1$. Sostituisco in quest'ultima equazione le coordinate dei punti A e B, che appartenendo all'iperbole rendono la sua equazione un'identità, e risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 4\,A-25\,B=-1 \\ 9\,A-49\,B=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\,A-24B=0 \\ 4\,A-25\,B=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{24}{5}B \\ 96\,B-125\,B=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29\,B=5 \\ A=\dfrac{24}{5}B \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{24}{29} \\ B=\dfrac{5}{29} \end{cases} \qquad \mathbf{24\,x^2-5\,y^2=-29}$$

Se i fuochi fossero sull'asse x, il sistema diventerebbe:

$$\begin{cases} 4\,A-25\,B=1 \\ 9\,A-49\,B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\,A-24B=0 \\ 4\,A-25\,B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\dfrac{24}{5}B \\ 96\,B-125\,B=5 \end{cases}$$

In altre parole B avrebbe una soluzione negativa, ma B è il quadrato del reciproco di b, perciò non può essere. In altre parole, il sistema è impossibile.

5. Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $xy=2$ nel suo punto di ascissa $-\frac{1}{2}$.

Dopo aver determinato l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'iperbole, posso applicare la formula di sdoppiamento:

$$-\frac{1}{2}y=2 \qquad y=-4 \qquad P\left(-\frac{1}{2};\,-4\right)$$

$$\frac{x_P y+x y_P}{2}=2 \qquad -\frac{1}{2}y-4x=4 \qquad \mathbf{y=-8x-8}$$

In alternativa, posso determinare l'equazione del fascio di rette centrato in P, metterla a sistema con l'equazione dell'iperbole e porre $\Delta=0$ nell'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} xy=2 \\ y+4=m\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad x\left(mx+\frac{1}{2}m-4\right)=2 \qquad mx^2+x\left(\frac{1}{2}m-4\right)-2=0$$

$$\Delta=\left(\frac{1}{2}m-4\right)^2+8m=0$$

$$\frac{1}{4}m^2+16-4m+8m=0$$

$$\frac{1}{4}m^2+4m+16=0 \qquad \left(\frac{1}{2}m+4\right)^2=0 \qquad m=-8 \qquad \mathbf{y=-8x-8}$$

6. Un'iperbole, riferita al centro O e agli assi, ha un fuoco nel punto $F\ (5;0)$ e un vertice in $A\ (4;0)$.
   A. Scrivi l'equazione dell'iperbole.
   B. Scrivi l'equazione della tangente t all'iperbole nel suo punto B di ascissa $\frac{20}{3}$ e di ordinata positiva.
   C. Sia s la perpendicolare alla tangente t condotta per F e sia H il punto di intersezione tra s e t. Verifica che i segmenti OH e OA sono congruenti.

A. Dati il fuoco e il vertice, posso determinare tutti i parametri dell'ellisse:

$$\begin{cases} c = 5 \\ a = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = 9 \\ a = 4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$$

B. Data l'ascissa di B, determino la sua ordinata, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'iperbole:

$$\frac{20^2}{9} \cdot \frac{1}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{y^2}{9} = \frac{25}{9} - 1 \qquad y^2 = 16 \qquad y = \pm 4$$

Visto che B deve avere ordinata positiva, le coordinate di B sono: $\boldsymbol{B\ \left(\frac{20}{3};4\right)}$.

Determino l'equazione della tangente t all'iperbole applicando la regola di sdoppiamento:

$$\frac{20}{3}\frac{x}{16} - \frac{4y}{9} = 1 \qquad \frac{5}{12}x - \frac{4}{9}y = 1 \qquad t\colon \boldsymbol{y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{4}}$$

C. La retta s è perpendicolare a t e passa per il fuoco F:

$$y - 0 = -\frac{16}{15}(x - 5) \qquad s\colon \boldsymbol{y = -\frac{16}{15}x + \frac{16}{3}}$$

Trovo il punto di intersezione tra s e t (H), mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 15\,x - 16\,y - 36 = 0 \\ 16\,x + 15\,y - 80 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15 \cdot 16\,x - 256\,y - 36 \cdot 16 = 0 \\ 15 \cdot 16\,x + 225\,y - 80 \cdot 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -481\,y = 3 \cdot 8 \cdot (24 - 50) \\ 15\,x - 16\,y - 36 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{48}{37} \\ 5\,x - 16 \cdot \dfrac{16}{37} - 12 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{140}{37} \\ y = \dfrac{48}{37} \end{cases}$$

Determino la lunghezza del segmento OH, mentre il segmento OA è facilmente calcolabile ed è lungo **4**.

$$\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{140}{37}\right)^2 + \left(\frac{48}{37}\right)^2} = \frac{4}{37}\sqrt{35^2 + 12^2} = \frac{4}{37}\sqrt{1225 + 144} = \frac{4}{37}\sqrt{1369} = \boldsymbol{4}$$

I due segmenti sono effettivamente congruenti.

7. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:

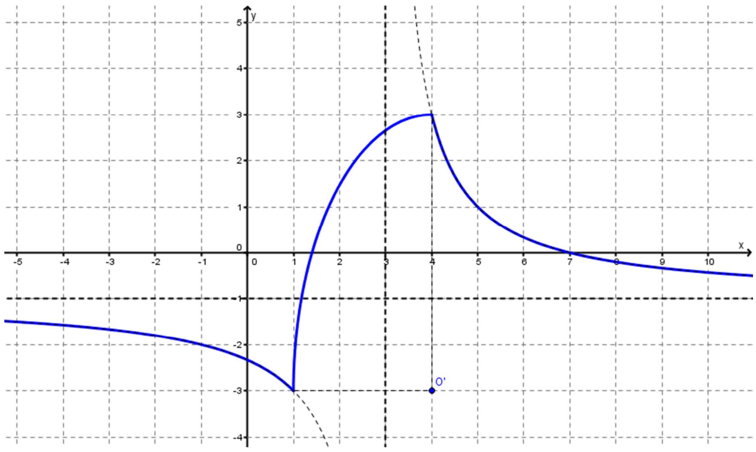
Cominciamo dalla funzione omografica di asintoti $x = 3$ e $y = -1$, passante per il punto $(1;\ -3)$, perciò:

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{-x + \frac{b}{c}}{x - 3}$$

Sostituendo le coordinate del punto:

$$-3 = \frac{-1 + \frac{b}{c}}{1 - 3} \qquad \frac{b}{c} = 7$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-x + 7}{x - 3}}$$



Considero poi l'arco di ellisse traslata, di centro di simmetria $O'(4;\ -3)$ e di semiassi rispettivamente 3 e 6:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1 \qquad (y+3)^2 = 36 - 4\,(x-4)^2 \qquad y = -3 + 2\sqrt{8x - x^2 - 7}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} \dfrac{7 - x}{x - 3} & x \le 1 \ \vee \ x \ge 4 \\ -3 + 2\sqrt{8x - x^2 - 7} & 1 < x < 4 \end{cases}}$$