1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? (Esame di Stato Liceo Scientifico PNI, 2003 – Sessione ordinaria)

Innanzi tutto, calcoliamo quante coppie possiamo ottenere da 18 squadre, usando le combinazioni semplici: $\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!\cdot 16!} = 153$
Queste sono le partite di un turno. Per ottenere il totale delle partite (andata e ritorno) non dobbiamo far altro che moltiplicare il risultato per 2 e otteniamo **306**.

2. Un cartolaio vuole esporre in vetrina 5 calcolatrici scientifiche scelte fra i 12 modelli che ha in negozio. In quanti modi può effettuare la scelta?

Per determinare in quanti modi si può effettuare la scelta, dobbiamo usare il coefficiente binomiale, perché è come determinare quanti gruppi di 5 si possono costruire a partire da 12 modelli diversi tra loro: $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \mathbf{792}$

3. Si lanciano 4 dadi identici. Quante combinazioni distinte possono uscire?

In questo caso non interessa l'ordine di uscita, ma solo la composizione di ogni possibile gruppo. L'uscita è data da $n = 6$, ovvero le 6 facce dei dadi; mentre i 4 dadi identici sono indicati da $k = 4$. Applicando la formula otteniamo: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \mathbf{126}$.

4. Per quanti elementi distinti il numero delle combinazioni a 3 a 3 risulta uguale ai 4/7 di quello delle combinazioni a 4 a 4?

Le combinazioni si ottengono dai coefficienti binomiali. Indicando con x il numero degli elementi distinti, otteniamo:

$$\binom{x}{3} = \frac{4}{7}\binom{x}{4} \qquad \frac{x!}{3!\,(x-3)!} = \frac{4}{7}\cdot\frac{x!}{4!\,(x-4)!} \qquad \frac{1}{3!\,(x-3)(x-4)!} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4\cdot 3!\,(x-4)!}$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{7} \qquad x-3 = 7 \qquad x = \mathbf{10}$$

5. Quanti sono i numeri di 6 cifre di cui le prime tre dispari e le restanti pari?

Le cifre dispari sono 5, così come quelle pari: per ogni posizione ho quindi 5 scelte. La risposta è: $5^6 = \mathbf{15\,625}$.

6. Quanti numeri possiamo formare con tutte le cifre del numero 23 323?

È come calcolare quanti anagrammi è possibile fare per una parola di 5 lettere, con una lettera che si ripete per 3 volte e l'altra per 2. Usiamo quindi una permutazione con ripetizione: $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = \mathbf{10}$.

7. Un libraio dispone di tre vetrinette per esporre le novità: una riservata ai romanzi, una ai libri scientifici e una ai libri di attualità, e in ciascuna di esse si possono esporre tre titoli. Questo mese tra le novità ci sono 8 romanzi, 4 libri scientifici e 6 di attualità. In quanti modi si possono allestire le vetrinette, tenendo conto della disposizione dei libri?

Cominciamo con la vetrina dei romanzi: per il primo romanzo abbiamo 8 scelte possibili, per il secondo 7 e per il terzo 6, ovvero $8\cdot 7\cdot 6$. Si tratta quindi di applicare la disposizione semplice per ogni vetrinetta, ma non è necessario contare le possibili disposizioni delle vetrinette che, da quanto si può capire dal testo, restano fisse, perciò 336 disposizioni possibili per la vetrina dei romanzi, 24 per quella dei libri scientifici e 120 per quella dei titoli di attualità, in totale: $336\cdot 24\cdot 120 = \mathbf{967\,680}$.

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono tre a caso; qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? (Esame di Stato Liceo Scientifico, 2001 – Sessione ordinaria)

Nella prima scelta ho 12 possibilità su 16 casi totali, nella seconda scelta sono rimasti 11 ragazzi e 15 scelte totali e nella terza 10 su 14, ovvero: $\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14} = \mathbf{\frac{11}{28}}$.

9. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina; qual è la probabilità che sia nera e di vetro? (Esame di Stato Liceo Scientifico PNI, 2005 – Sessione straordinaria)

Ricostruiamo tramite una tabella la distribuzione delle palline:

	Plastica	Vetro	
Bianche		45	135
Nere	80		
		115	

	Plastica	Vetro	
Bianche	90	45	135
Nere	80	70	150
	170	115	285

Abbiamo quindi 70 palline nere di vetro su un totale di 285 palline, ovvero: $\frac{70}{285} = \mathbf{\frac{14}{57}}$.

10. Un'urna contiene 60 palline di cui 10 bianche, 20 verdi, 16 gialle e 14 nere. Calcola la probabilità che:
A. estraendo due palline contemporaneamente, esse siano dello stesso colore;
B. estraendo due palline successivamente e rimettendo la prima estratta nell'urna, esse siano dello stesso colore.

A. Perché siano dello stesso colore possono essere entrambe bianche, entrambe verdi, gialle o nere, quindi, calcolando che non c'è reimmissione:

$$\frac{10}{60}\cdot\frac{9}{59}+\frac{20}{60}\cdot\frac{19}{59}+\frac{16}{60}\cdot\frac{15}{59}+\frac{14}{60}\cdot\frac{13}{59}=\mathbf{\frac{223}{885}}$$

B. Nel caso in cui la prima pallina sia rimessa nell'urna, la probabilità tra il primo e il secondo lancio non cambia, ovvero:

$$\left(\frac{10}{60}\right)^2+\left(\frac{20}{60}\right)^2+\left(\frac{16}{60}\right)^2+\left(\frac{14}{60}\right)^2=\mathbf{\frac{119}{450}}$$

11. In un'urna vi sono 8 palline rosse e 2 nere; in una seconda urna vi sono 4 palline rosse e 5 nere. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda, e da questa si estrae una pallina. Calcola la probabilità che essa sia rossa.

Nel caso in cui la prima pallina che passa dalla prima alla seconda urna sia rossa, l'estrazione della prima pallina ha una probabilità di 8/10 e la seconda urna conterrà 5 palline rosse e 5 nere: avremo quindi una probabilità di 5/10 di estrarre una pallina rossa dalla seconda urna.
Nel caso in cui la prima pallina che passa dalla prima alla seconda urna sia nera, l'estrazione della prima pallina ha una probabilità di 2/10 e la seconda urna conterrà 4 palline rosse e 6 nere: avremo quindi una probabilità di 4/10 di estrarre una pallina rossa dalla seconda urna.
In totale:

$$\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{48}{100}=\mathbf{48\%}$$

12. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
A. è bianca e viene rimessa nell'urna?
B. è bianca e non viene rimessa nell'urna?
C. è messa da parte senza guardare il colore?
(Esame di Stato Liceo Scientifico PNI, 2003 – Sessione suppletiva)

A. Se la prima pallina è bianca e viene rimessa nell'urna, la probabilità di estrarre una pallina bianca è di 18 casi favorevoli su 30 palline totali, ovvero: **60%**.

B. Se la prima pallina è bianca e non viene rimessa nell'urna, ora ci sono 17 palline bianche e 29 palline in totale, perciò la probabilità è di **17/29**.

C. Nel caso in cui si tolga una pallina senza guardarne il colore abbiamo due casi con due diverse probabilità che vanno sommate:
- se la pallina estratta è bianca, ne restano 17 bianche e 29 totali, quando la probabilità di estrarre la prima bianca era di 18/30
- se la pallina estratta è nera, ne restano 18 bianche su 29 totali, quando la probabilità di estrarre la prima nera era di 12/30

Riassumendo:

$$\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29}+\frac{12}{30}\cdot\frac{18}{29}=\frac{18\cdot(17+12)}{29\cdot 30}=\frac{18}{30}=\mathbf{60\%}$$