1. Il rendimento di una macchina di Carnot che ha la sorgente fredda alla temperatura di $295\ K$, è del $21{,}0\%$. Assumendo che la temperatura della sorgente calda rimanga invariata, a quale temperatura dovrà essere la sorgente fredda per raggiungere un rendimento del $25{,}0\%$?

$$T_{f_1} = 295\ K \qquad \eta_1 = 0{,}21 \qquad \eta_2 = 0{,}25 \qquad T_{c_1} = T_{c_2} = T \qquad T_{f_2}?$$

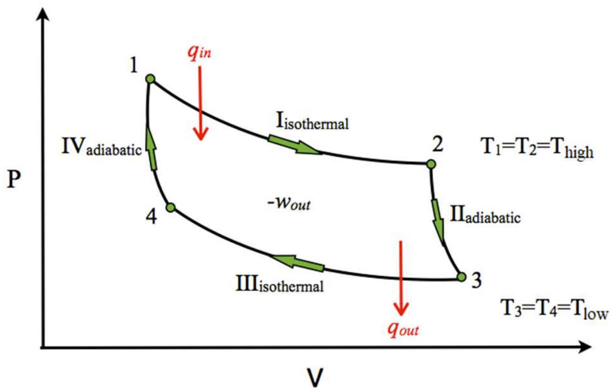
Trattandosi di una macchina di Carnot, il rendimento è dato da: $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$, perciò:

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 - \dfrac{T_{f_1}}{T_{c_1}} \\ \eta_2 = 1 - \dfrac{T_{f_2}}{T_{c_2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{T_{f_1}}{T} = 1 - \eta_1 \\ \dfrac{T_{f_2}}{T} = 1 - \eta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} T = \dfrac{T_{f_1}}{1-\eta_1} \\ T = \dfrac{T_{f_2}}{1-\eta_2} \end{cases} \qquad \frac{T_{f_1}}{1-\eta_1} = \frac{T_{f_2}}{1-\eta_2} \quad \Rightarrow \quad T_{f_2} = T_{f_1}\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} = \mathbf{280\ K}$$

2. In un ciclo di Carnot, l'espansione isoterma del gas avviene a $273\ °C$ e la compressione isoterma a $127\ °C$. Sapendo che durante l'espansione il gas assorbe $2093\ J$, calcola: a) il lavoro fatto dal gas durante l'espansione isoterma, b) il calore ceduto dal gas durante la compressione isoterma.

$$T_c = 546\ K \qquad T_f = 400\ K \qquad Q_c = 2093\ J \qquad L_e? \qquad |Q_f|?$$

A lato è rappresentato un ciclo di Carnot[1] nel piano di Clapeyron.



a. L'equivoco, nello svolgimento dell'esercizio, può essere quello di determinare il lavoro totale del ciclo, usando il secondo principio della termodinamica e il rendimento di una macchina di Carnot, ma il lavoro richiesto è quello per compiere l'espansione. Trattandosi di una espansione isoterma (quella che avviene tra il punto 1 e il punto 2), ovvero con $\Delta T = 0$:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 0$$

Per il **primo principio** della termodinamica:

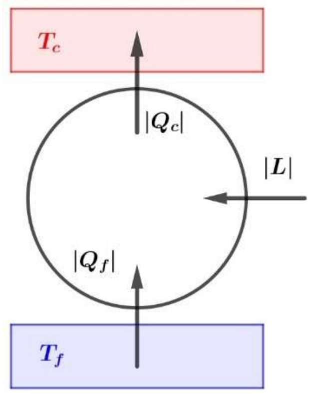
$$\Delta U = Q - L \quad \Rightarrow \quad L_e = Q_c = \mathbf{2093\ J}$$

b. Per determinare il calore ceduto durante la compressione isoterma, basta considerare che si tratta di una macchina di Carnot:

$$\frac{T_f}{T_c} = \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \quad \Rightarrow \quad |Q_f| = |Q_c|\frac{T_f}{T_c} = \mathbf{1533\ J}$$

3. Per mantenere una stanza alla confortevole temperatura di $21°C$, una pompa di calore che funziona come una macchina di Carnot compie $345\ J$ di lavoro e rifornisce alla stanza $3240\ J$ di calore. Calcola: a) la quantità di calore scambiata dalla pompa con l'aria esterna; b) la temperatura dell'aria esterna.

$$T_c = 294\ K \qquad |L| = 345\ J \qquad |Q_c| = 3240\ J \qquad |Q_f|? \qquad T_f?$$



a. Dato lo schema della pompa di calore a lato:

$$|Q_c| = |Q_f| + |L| \quad \Rightarrow \quad |Q_f| = |Q_c| - |L| = \mathbf{2895\ J}$$

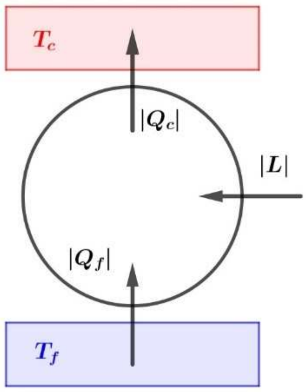
b. Per determinare la temperatura del serbatoio freddo, basta considerare che si tratta di una macchina di Carnot:

$$\frac{T_f}{T_c} = \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \quad \Rightarrow \quad T_f = T_c\frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 263\ K = \mathbf{-10°C}$$

[1] Fonte dell'immagine: https://shorturl.at/pBHJ7

4. Per mantenere la temperatura interna di una casa a $21°C$, quando la temperatura esterna è di $32°C$, viene utilizzato un condizionatore. Assumendo che il calore fluisca dalla casa alla potenza di $11\ kW$ e che il condizionatore abbia un rendimento pari a una macchina di Carnot, calcola la potenza meccanica necessaria per mantenere fresca la casa.

$$T_c = 305\ K \qquad T_f = 294\ K \qquad P_f = 11\ kW \qquad P?$$



Trattandosi di potenza del calore che fluisce dalla casa, è la potenza che si ottiene come rapporto tra il calore che viene tolto alla stanza dal condizionatore e il tempo impiegato a farlo. La potenza meccanica richiesta, invece, è quella data dal rapporto tra il lavoro compiuto dal condizionatore e lo stesso intervallo di tempo. Perciò, data la relazione tra i calori e il lavoro e dividendo tutti i termini per lo stesso intervallo di tempo, ottengo:

$$|Q_c| = |Q_f| + |L| \quad \Rightarrow \quad P_c = P_f + P \quad (*)$$

Ho bisogno di un'altra relazione, dato che nella precedente equazione compaiono due incognite, e uso il fatto che il condizionatore abbia un rendimento pari a una macchina di Carnot, e dividendo i calori per lo stesso intervallo di tempo:

$$\frac{T_f}{T_c} = \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_f}{T_c} = \frac{P_f}{P_c} \quad \Rightarrow \quad P_c = P_f\frac{T_c}{T_f}$$

Sostituendo P_c in $(*)$, posso determinare il valore richiesto:

$$P = P_c - P_f = P_f\frac{T_c}{T_f} - P_f = P_f\left(\frac{T_c}{T_f} - 1\right) = \mathbf{0,41\ kW}$$

5. Un cilindro contiene 4 moli di un gas monoatomico a temperatura iniziale di $27°C$. Il gas viene compresso effettuando su di esso un lavoro pari a $560\ J$. La sua temperatura aumenta di $130°C$. Qual è la quantità di calore acquistata o perduta dal gas?

$$n = 4\ mol \qquad \Delta T = 130\ K \qquad L = -560\ J \qquad Q?$$

Applicando il primo principio e la definizione di energia interna, ottengo:

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \\ \Delta U = Q - L \end{cases} \qquad Q - L = \frac{3}{2}nR\Delta T \qquad Q = L + \frac{3}{2}nR\Delta T = \mathbf{5,9\ kJ} \quad calore\ acquistato$$

6. Una mole di un gas monoatomico si trova inizialmente a una temperatura di $263\ K$. A) Determina la temperatura del gas se il sistema assorbe una quantità di calore pari a $3280\ J$ e compie un lavoro di $722\ J$. B) Supponi di raddoppiare la quantità di gas. La temperatura finale in questo caso aumenta, diminuisce o rimane inalterata rispetto a quella calcolata nel punto A? Motiva la risposta.

$$n = 1\ mol \qquad T_1 = 263\ K \qquad Q = 3280\ J \qquad L = 722\ J \qquad T_2? \qquad Se\ n' = 2n \qquad T_2' >< T_2?$$

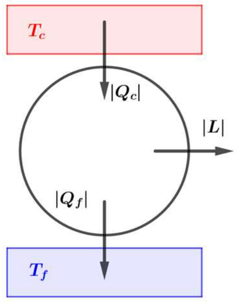
a. Applicando il primo principio e la definizione di energia interna, ottengo:

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \\ \Delta U = Q - L \end{cases} \qquad \frac{3}{2}nR\Delta T = Q - L \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{Q-L}{\frac{3}{2}nR} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 + \frac{Q-L}{\frac{3}{2}nR} = \mathbf{468\ K}$$

b. La variazione di temperatura è inversamente proporzionale al numero di moli, perciò, raddoppiando il numero di moli (la quantità di sostanza), l'aumento di temperatura si dimezza, quindi la temperatura finale nel secondo caso sarà **minore** rispetto a quella calcolata nel punto A.

7. Una macchina termica opera tra una sorgente ad alta temperatura di $610\ K$ e una sorgente a bassa temperatura di $320\ K$. In un ciclo completo la macchina assorbe $6400\ J$ di calore dalla sorgente ad alta temperatura e produce $2200\ J$ di lavoro. Calcola la variazione totale di entropia in questo ciclo.

$$T_c = 610\ K \qquad T_f = 320\ K \qquad |Q_c| = 6400\ J \qquad |L| = 2200\ J \qquad \Delta S?$$



Determino $|Q_f|$:

$$|Q_c| = |Q_f| + |L| \quad \Rightarrow \quad |Q_f| = |Q_c| - |L|$$

Se tengo come punto di riferimento l'universo: $Q_c < 0$ e $Q_f > 0$, perciò l'entropia è:

$$\Delta S = -\frac{|Q_c|}{T_c} + \frac{|Q_f|}{T_f} = -\frac{|Q_c|}{T_c} + \frac{|Q_c| - |L|}{T_f} = \mathbf{2,6\ J/K}$$

8. Un inventore sostiene di aver progettato un nuovo motore ciclico che utilizza come fluido termodinamico il succo di pompelmo. Secondo le sue affermazioni, il motore riceve $1250\ J$ di calore da una sorgente a $1010\ K$ e produce $1120\ J$ di lavoro per ogni ciclo. Il calore di scarto viene emesso nell'atmosfera a una temperatura di $302\ K$. A) Qual è il rendimento che si può dedurre dalle affermazioni dell'inventore? B) Qual è il rendimento di una macchina reversibile che lavora tra le stesse temperature utilizzate da questo motore? C) Investiresti del denaro in questo progetto?

$$|Q_c| = 1250\ J \qquad T_c = 1010\ K \qquad |L| = 1120\ J \qquad T_f = 302\ K \qquad \eta? \qquad \eta_C?$$

a. Determino il rendimento della macchina secondo la definizione: $\eta = \frac{|L|}{|Q_c|} = 0{,}896 = \mathbf{89,6\%}$

b. Determino il rendimento della macchina reversibile che lavora tra le stesse temperature: $\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0{,}701 = \mathbf{70,1\%}$

c. Non investirei mai denaro in un progetto di questo tipo, perché è **irrealizzabile**. Nessuna macchina, infatti, può avere un rendimento maggiore di quello di una macchina reversibile e, in questo caso, $\eta > \eta_C$.

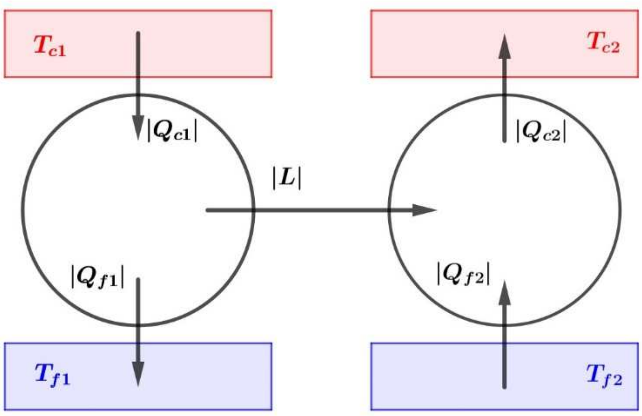
9. Una macchina di Carnot lavora tra le temperature di 600 K e 300 K. Il lavoro prodotto dalla macchina è immesso in una seconda macchina per farla funzionare come frigorifero, utilizzando ancora un ciclo di Carnot, percorso ovviamente in verso antiorario, che opera tra due sorgenti che si trovano a 310 K e 260 K. Il calore fornito alla prima macchina è di 418 J a ogni ciclo. Calcola il calore che la seconda macchina estrae in un ciclo dalla sorgente fredda.

$$T_{c_1} = 600\ K \qquad T_{f_1} = 300\ K \qquad T_{c_2} = 310\ K \qquad T_{f_2} = 260\ K \qquad |Q_{c_1}| = 418\ J \qquad |Q_{f_2}|?$$

Comincio con il determinare il rendimento della prima macchina, usando il fatto che è una macchina di Carnot e usando la definizione:

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 - \frac{T_{f_1}}{T_{c_1}} \\ \eta_1 = \frac{|L|}{|Q_{c_1}|} \end{cases} \qquad 1 - \frac{T_{f_1}}{T_{c_1}} = \frac{|L|}{|Q_{c_1}|}$$

$$\Rightarrow \quad |L| = |Q_{c_1}|\left(1 - \frac{T_{f_1}}{T_{c_1}}\right) = \frac{|Q_{c_1}|}{2}$$



Procedo con la seconda macchina, anch'essa di Carnot:

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_{f_2}}{T_{c_2}} = \frac{|L|}{|Q_{c_2}|} = \frac{|L|}{|Q_{f_2}| + |L|}$$

Passando ai reciproci:

$$\frac{|Q_{f_2}| + |L|}{|L|} = \frac{1}{1 - \frac{T_{f_2}}{T_{c_2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_{f_2}|}{|L|} + 1 = \frac{T_{c_2}}{T_{c_2} - T_{f_2}} \quad \Rightarrow \quad |Q_{f_2}| = |L|\left(\frac{T_{c_2}}{T_{c_2} - T_{f_2}} - 1\right) = \frac{|Q_{c_1}|}{2} \cdot \frac{T_{f_2}}{T_{c_2} - T_{f_2}} = \mathbf{1,09\ kJ}$$