1. $\int x^2 \, sen\, x \; dx$

Applico la formula dell'integrale per parti:

$$\int f(x)\; g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad\qquad g'(x) = senx \qquad g(x) = -\cos x$$

$$\int x^2 \, sen\, x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \; dx$$

Al secondo integrale applico ancora la formula dell'integrale per parti:

$$f(x) = 2x \qquad f'(x) = 2 \qquad\qquad g'(x) = \cos x \qquad g(x) = sen\, x$$

$$\int x^2 \, sen\, x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \; dx = -x^2 \cos x + 2x\, sen\, x - \int 2\, sen\, x\, dx =$$

$$= \boldsymbol{-x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2 \cos x + c}$$

2. $\int e^x \cos x \; dx$

Applico la formula dell'integrale per parti:

$$\int f(x)\; g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad\qquad g'(x) = \cos x \qquad g(x) = sen\, x$$

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x\, senx - \int e^x sen\, x\, dx$$

Al secondo integrale applico ancora la formula dell'integrale per parti:

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad\qquad g'(x) = sen\, x \qquad g(x) = -\cos x$$

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x\, senx - \int e^x sen\, x\, dx = e^x sen\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \; dx$$

Riscrivo l'ultimo passaggio:

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x sen\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \; dx$$

Sposto l'integrale del secondo membro a primo membro:

$$\int e^x \cos x \; dx + \int e^x \cos x \; dx = e^x sen\, x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \; dx = \boldsymbol{\frac{e^x}{2}(sen\, x + \cos x) + c}$$

3. $\int \frac{e^{ctg\, x}}{sen^2 x} \; dx$

Posso eseguire una sostituzione, ponendo: $t = ctg\, x$ perciò: $dt = -\frac{1}{sen^2 x} dx$. Sostituendo, ottengo:

$$-\int e^t\, dt = -e^t + c = \boldsymbol{-e^{ctg\, x} + c}$$

4. $\int \frac{3x-1}{2x+3}\ dx$

$$3\int \frac{x-\frac{1}{3}}{2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{2}{3}}{2x+3}\ dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+3-3-\frac{2}{3}}{2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+3}{2x+3}\ dx - \frac{11}{2}\int \frac{1}{2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{11}{4}\int \frac{2}{2x+3}\,dx = \boldsymbol{\frac{3}{2}x - \frac{11}{4}\ln\,|2x+3| + c}$$

5. $\int \frac{1}{4x^2-4x+1}\ dx$

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^2}\ \ dx = \frac{1}{2}\,(2x-1)^{-1}(-1)+c = \boldsymbol{-\frac{1}{2\,(2x-1)}+c}$$

6. $\int x\, e^{x^2-3}\ dx$

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2-3}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\,e^{x^2-3}+c}$$

7. $\int \frac{1}{sen^2 x\cos^2 x}\ dx$

$$\int \frac{sen^2\,x+\cos^2\,x}{sen^2\ x\ \cos^2\ x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{sen^2 x}\right)\ dx = \boldsymbol{tg\ x - ctg\ x + c}$$

8. $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\ dx$

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1-B \\ -3+3B-2B=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-4 \\ B=5 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\ dx = -4\int \frac{1}{x-2}\ \ dx + 5\int \frac{1}{x-3}\ \ dx = \boldsymbol{-4\ ln\,|x-2| + 5\ ln\,|x-3| + c}$$

9. $\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}\ dx = \frac{1}{2}\ln\ (x^2+4x+5) - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\ dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\ (x^2+4x+5) - 2\ arc\ tg\ (x+2) + c}$$

10. $\int \left(x^3 - \frac{3x-2}{x^2}\right)\ dx$

$$\int \left(x^3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\ dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - 3\ ln\ |x| - \frac{2}{x} + c}$$

11. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

Esame di Stato Liceo Scientifico sperimentale 2007 – sessione ordinaria quesito 9

Posso eseguire una sostituzione, ponendo: $x = \cos\ t$ perciò: $dx = -sen\ t\ dt$. Sostituendo, ottengo:

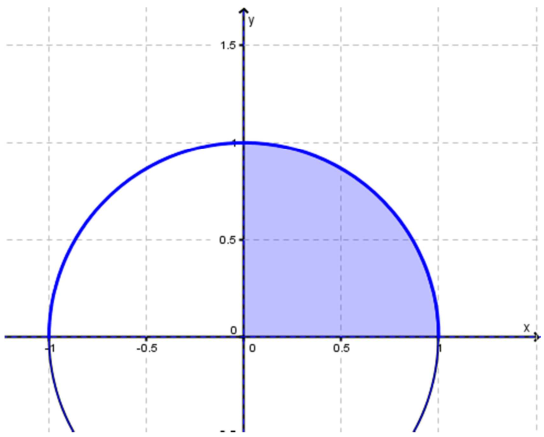
$$-\int sen^2\ t\ dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\ 2t + c = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}sen\ t\cos t + c = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cos t\ \sqrt{1-\cos^2 t} + c =$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}arc\ cos\ x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c}$$

Calcolo l'integrale definito:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \left(-\frac{1}{2}arc\cos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$



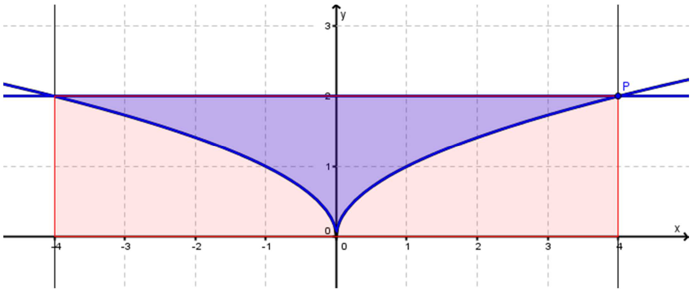
Geometricamente, calcolare questo integrale definito significa calcolare l'area del quarto di circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 situato nel primo quadrante. La circonferenza ha area p, perciò l'area di un quarto di circonferenza vale $\frac{\pi}{4}$, come determinato con il calcolo integrale.

12. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

<u>Esame di Stato Liceo Scientifico 2010 – sessione ordinaria quesito 10</u>

La proiezione del solido generato dalla rotazione indicata corrisponde all'area colorata in rosso a lato. La si può ottenere, sottraendo dal volume del cilindro di raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido la cui proiezione è indicata in blu.
Dal punto di vista del calcolo, si procede così:

$$V = V_{cilindro} - V_{blu} = 4^2\,\pi \cdot 2 - \pi \int_0^2 \left(f(y)\right)^2 dy$$



L'espressione di $f(y)$ è:

$$y = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = y^2$$

$$V = 32\,\pi - \pi \int_0^2 y^4\,dy = 32\,\pi - \pi \left(\frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_0^2 = 32\,\pi - \frac{32}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{128}{5}\pi}$$