1. Lungo un pendio inclinato di 30° rispetto all'orizzontale, uno sciatore di 70,0 kg scende con velocità costante di 10,0 m/s. Trascurando l'attrito dell'aria, calcola il lavoro della forza d'attrito con il suolo in 1,0 s.

La forza applicata dalla forza d'attrito è uguale e contraria alla componente parallela della forza peso, visto che lo sciatore scende con velocità costante. Lo spazio percorso, invece, è dato dal prodotto tra velocità e tempo, visto che si tratta di un moto rettilineo uniforme, perciò:

$$L = -mg\ sen\ 30° \cdot vt = \boldsymbol{-3,4\ \cdot 10^3\ J}$$

Il lavoro è negativo, perché la forza d'attrito ha verso opposto rispetto allo spostamento.

2. Una pallina sale lungo una salita con velocità iniziale di 20 m/s. Al termine della salita la sua velocità si è ridotta a 5 m/s. Qual è il dislivello coperto dalla pallina? Qual è la velocità a metà della salita?

Per il principio di conservazione dell'energia:

$$K_o + U_o = K_f + U_f \qquad \Rightarrow \qquad U_f - U_o = K_o - K_f$$
$$mgh_f - mgh_o = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$h_f - h_o = \frac{1}{2g}\left(v_o^2 - v_f^2\right) = \boldsymbol{19\ m}$$

Per il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{mgh_f - mgh_o}{2} = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$gh_f - gh_o = v_o^2 - v_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{v_o^2 - g\left(h_f - h_o\right)} = \boldsymbol{15\ m/s}$$

3. In un tubo orizzontale cilindrico di raggio di base 4,00 cm scorre acqua alla velocità di 2,40 m/s. All'uscita del tubo viene posta una strozzatura che riduce il raggio della metà. Calcola la velocità con cui l'acqua esce dalla strozzatura.

Per la legge di continuità:

$$A_1v_1 = A_2v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = v_1\frac{\pi\, r_1^2}{\pi\, r_2^2} = v_1\left(\frac{r_1}{\frac{1}{2}r_1}\right)^2 = 4v_1 = \boldsymbol{9,60\ m/s}$$

4. Un serbatoio pieno d'acqua è alto 2,0 m ed è munito di un rubinetto posto a 20 cm dalla sua base. Calcola la velocità con cui l'acqua esce dal rubinetto.

Per il teorema di Torricelli:

$$v = \sqrt{2g\ (H - h)} = \boldsymbol{5,9\ m/s}$$

5. Andrea e Maria, inizialmente fermi uno di fronte all'altro in una pista di pattinaggio su ghiaccio, si spingono e cominciano a muoversi nella stessa direzione, ma in versi opposti. Andrea, che ha una massa di 54 kg, si muove verso sinistra alla velocità di 4,0 m/s, Maria si muove verso destra alla velocità di 4,5 m/s. Qual è la massa di Maria?

$$m_1 = 54\,kg \qquad v_1 = -4{,}0\,m/s \qquad v_2 = 4{,}5\,m/s \qquad m_2 = ?$$

La quantità di moto iniziale è nulla. Per il principio di conservazione della quantità di moto, è nulla anche la quantità di moto finale, perciò:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_2 = -m_1 \frac{v_1}{v_2} = \mathbf{48\,kg}$$

6. In un urto elastico tra due biglie identiche, una biglia colpisce l'altra inizialmente ferma. Dopo l'urto, le due biglie si muovono rispettivamente alle velocità di 2,5 m/s e 4,2 m/s.
   A. Che angolo formano tra di loro le direzioni delle velocità delle biglie dopo l'urto?
   B. Quanto valeva la velocità della biglia in movimento prima dell'urto?

A. Trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica, perciò:

$$\begin{cases} m\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{V_1} + m\overrightarrow{V_2} \\ \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} \\ v_1^2 = V_1^2 + V_2^2 \end{cases}$$

Dalla prima relazione, risulta evidente che la prima velocità si scompone nelle due velocità finali, ovvero otteniamo un triangolo che ha come lati le tre velocità, considerando la somma di vettori. Dalla seconda relazione, vediamo che vale il teorema di Pitagora, perciò le due velocità finali formano tra loro un angolo di **90°**.

B. Ricaviamo la velocità della biglia prima dell'urto dalla seconda relazione:

$$v_1 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \mathbf{4{,}9\,m/s}$$

7. Un lanciatore del disco parte da fermo e comincia a ruotare con un'accelerazione angolare costante di 2,2 rad/s^2. Quanti giri sono necessari perché la velocità angolare del lanciatore raggiunga i 6,3 rad/s? Quanto tempo ci vuole?.

$$\alpha = 2{,}2\,rad/s^2 \qquad \omega_o = 0 \qquad \omega = 6{,}3\,rad/s \qquad n? \qquad t?$$

Il numero di giri è dato dall'angolo descritto – misurato in radianti – diviso 2π, ovvero il valore in radianti di un angolo giro:

$$n = \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\alpha} = \mathbf{1{,}4\ giri}$$

Dalla definizione di accelerazione angolare, ricaviamo il tempo:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \mathbf{2{,}9\,s}$$

8. Un piccolo blocco di massa 0,0250 kg si muove su una superficie orizzontale priva di attrito. Esso è attaccato a un filo privo di massa che passa attraverso un foro praticato nella superficie. Il blocco inizialmente ruota a una distanza di 0,300 m con una velocità angolare di 1,75 rad/s. Il filo è successivamente tirato verso il basso, accorciando il raggio della circonferenza lungo la quale il blocco si muove a 0,150 m. Tratta il blocco come se fosse una particella e rispondi alle domande:
   A. Il momento angolare si conserva? Perché?
   B. Quanto vale la nuova velocità angolare?
   C. Calcola la variazione dell'energia cinetica del blocco.
   D. Quanto lavoro viene fatto tirando la corda?

$m = 0{,}0250\ kg \qquad r_1 = 0{,}300\ m \qquad \omega_1 = 1{,}75\ rad/s \qquad r_2 = 0{,}150\ m \qquad \omega_2 = ? \qquad \Delta K = ? \qquad L = ?$

A. Il momento angolare si conserva, perché è una forza centrale.

B. $L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{mr_1^2}{mr_2^2}\omega_1 = \mathbf{7,00\ rad/s}$

C. $\Delta K = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \mathbf{1,03 \cdot 10^{-2}\ J}$

D. $L = \Delta K = \mathbf{1,03 \cdot 10^{-2}\ J}$

9. Europa è un satellite di Giove (massa $1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$) che si muove su un'orbita di raggio $6{,}7 \cdot 10^5\ km$. Calcola il periodo orbitale di Europa.

$$M = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg \qquad r = 6{,}7 \cdot 10^5\ km \qquad T = ?$$

La forza di attrazione gravitazionale di Europa verso Giove è la forza centripeta che obbliga Europa a orbitare attorno a Giove, perciò:

$$F_c = F_G \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M}{r}$$

Ricordando che in un moto circolare uniforme $v = \frac{2\pi r}{T}$:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \mathbf{3,1 \cdot 10^5\ s}$$

10. Giove ha una massa di $1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$, dista $7{,}8 \cdot 10^{11}\ m$ dal Sole e orbita muovendosi a $13\ km/s$. Qual è il suo momento angolare rispetto al Sole?

$$M = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg \qquad r = 7{,}8 \cdot 10^{11}\ m \qquad v = 13\ km/s \qquad L = ?$$

Consideriamo Giove come una massa puntiforme, perciò il momento angolare è:

$$L = Mrv = \mathbf{1,9 \cdot 10^{43}\ kg\ m^2/s}$$

11. Un cilindro avente un momento d'inerzia pari a $14\ kg\ m^2$ ruota alla velocità di 12 rad/s. Determina l'energia cinetica del cilindro.

$$I = 14\ kg\ m^2 \qquad \omega = 12\ rad/s \qquad K = ?$$

Per la definizione di energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \mathbf{1,0 \cdot 10^3}\ \boldsymbol{J}$$