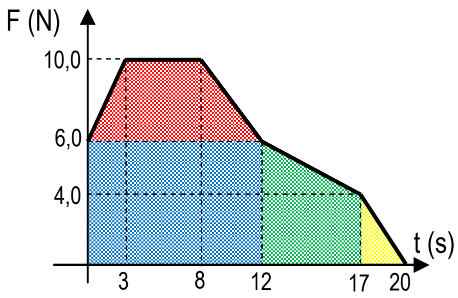
1. Riferendoti alla figura 1, determina l'impulso, la forza media che agisce nell'arco dei 20 s e la variazione della quantità di moto.

Per determinare l'impulso, calcolo l'area della regione di piano sottesa dal grafico.
Calcolo le aree secondo la suddivisione indicata dai colori, ovvero calcolo l'area di un rettangolo (blu), un trapezio rettangolo (verde), un trapezio (rosso) e un triangolo rettangolo (giallo):



$$A_1 = 6{,}0\ N \cdot 12s = 72\ kg\ m/s$$

$$A_2 = \frac{(6{,}0N + 4{,}0N) \cdot 5s}{2} = 25\ kg\ m/s$$

$$A_3 = \frac{(5{,}0\ s + 12\ s) \cdot 4{,}0N}{2} = 34\ kg\ m/s$$

$$A_4 = \frac{3\ s \cdot 4{,}0N}{2} = 6{,}0\ kg\ m/s$$

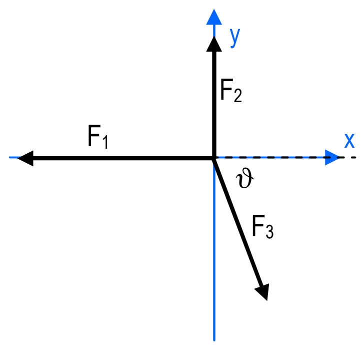
L'impulso, sommando le tre aree, ha valore: $\boldsymbol{I = 1{,}4\ \cdot 10^2\ kg\ m/s}$

Dall'impulso, posso determinare la forza media, che agisce nell'arco dei 20 s:

$$I = F_m \cdot \Delta t \quad \Longrightarrow \quad F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{137\ kg\ m/s}{20\ s} = \mathbf{6{,}9\ N}$$

La variazione della quantità di moto è pari all'impulso, perciò: $\Delta p = \ \boldsymbol{1{,}4\ \cdot 10^2\ kg\ m/s}$

2. Riferendoti alla figura 2, che rappresenta una situazione di equilibrio, determina:
   a. l'ampiezza dell'angolo ϑ e il modulo di F_2, sapendo che la forza F_1 ha modulo 5,0 N e la forza F_3 ha modulo 10 N;
   b. il modulo delle forze F_1 e F_2, sapendo che il modulo di F_3 è 4,0 N e l'angolo ϑ misura 30°;
   c. l'ampiezza dell'angolo ϑ e l'intensità della forza F_3, sapendo che la forza F_2 ha modulo 4,0 N e la forza F_1 ha modulo 3,0 N.



Assegno gli assi cartesiani, in maniera tale che l'asse y abbia la stessa direzione e lo stesso verso del vettore F_2, mentre l'asse x ha la stessa direzione della forza F_1, ma verso opposto.

A. Considerando le componenti del vettore F_3 rispetto agli assi cartesiani, la componente orizzontale dovrà essere compensata dal vettore F_1, ovvero uguale alla componente orizzontale del vettore F_1, ma di verso opposto. Eguagliando la componente orizzontale del vettore F_3 al vettore F_1, possiamo determinare l'angolo ϑ.

$$F_{3x} = F_1 \quad \Longrightarrow \quad F_3 \cos\vartheta = F_1 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta = cos^{-1}\frac{F_1}{F_3} = \mathbf{60°}$$

Per determinare F_2, considero il fatto che la componente verticale del vettore F_3 deve uguagliare il vettore F_2, oppure uso il teorema di Pitagora:

$$F_2 = F_3 \sin\vartheta = \mathbf{8{,}7\ N}$$

B. Esattamente come nel sistema precedente, ma avendo come incognite F_1 e F_2:

$$\begin{cases} F_1 = F_3 cos\vartheta \\ F_2 = F_3 sen\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} F_1 = \mathbf{3{,}5\ N} \\ F_2 = \mathbf{2{,}0\ N} \end{cases}$$

C. La forza F_2 ha lo stesso modulo della componente verticale della forza F_3, mentre la forza F_1 ha lo stesso modulo della componente orizzontale della forza F_3. Sfruttando queste due uguaglianze, possiamo ricavare F_3 e l'angolo ϑ. Per trovare F_3 posso, più rapidamente, usare il teorema di Pitagora:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \mathbf{5{,}0\ N}$$

Ed è semplice poi ricavare l'ampiezza dell'angolo:

$$F_2 = F_3 cos\vartheta \qquad cos^{-1}\frac{F_2}{F_3} = \mathbf{37°}$$

3. Una massa oscilla attaccata a una molla, con un periodo di 0,60 s e un'ampiezza di 3,0 cm. Determina:
    a. l'equazione della posizione;
    b. la frequenza;
    c. l'istante di tempo in cui la massa di trova per la prima volta nella posizione x = 0,0 cm;
    d. l'istante di tempo in cui la massa di trova per la prima volta nella posizione x = 1,5 cm.

A. L'equazione generica della posizione è: $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right)$, perciò otteniamo: $\boldsymbol{x = (3,0\ cm)\cos\left(\frac{2\pi}{0,60\ s}\,t\right)}$

B. La frequenza è il reciproco del periodo, perciò: $f = \frac{1}{T} = \boldsymbol{1,7\ Hz}$

C. La posizione x = 0,0 cm corrisponde all'angolo di 90°, cioè a un quarto della circonferenza, perciò il tempo impiegato sarà un quarto del periodo: $t = \boldsymbol{0,15\ s}$

D. Uguagliando la posizione x = 1,5 cm all'espressione della posizione, trovo l'istante t richiesto:

$$1,5\ cm = (3,0\ cm)\cos[2\pi t/(0,60s)]$$

$$\frac{1,5\ cm}{3,0\ cm} = \cos[2\pi t/(0,60s)] \qquad \cos[2\pi t/(0,60s)] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi t}{0,60\ s} = cos^{-1}\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi t}{0,60\ s} = \frac{\pi}{3} \quad\Rightarrow\quad t = \boldsymbol{0,10\ s}$$

4. Una molla di costante elastica 69 N/m è collegata a una massa di 0,57 kg. Assumendo che l'ampiezza del moto sia 3,1 cm, determina le seguenti grandezza del sistema:
    a. la pulsazione ω;
    b. la velocità massima v_{max};
    c. il periodo T.

A. Ricaviamo l'espressione del periodo di oscillazione della molla, eguagliando l'espressione del secondo principio della dinamica, all'espressione della forza elastica e sostituendo poi alla posizione e all'accelerazione le sue espressioni nel moto armonico:

$$ma = -kx \quad\Rightarrow\quad m(-A\omega^2\cos(\omega t)) = -kA\cos(\omega t)$$

$$m\omega^2 = k \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boldsymbol{11\ rad/s}$$

B. A questo punto possiamo ricavare la velocità massima, data dal prodotto tra ampiezza e pulsazione:

$$v_{max} = A\omega = \boldsymbol{0,34\ m/s}$$

C. Per determinare il periodo, uso la pulsazione determinata precedentemente, secondo la formula inversa:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{0,57\ s}$$

5. Un pendolo semplice di lunghezza 2,5 m compie 5 oscillazioni complete in 16 s. Qual è il valore dell'accelerazione di gravità nel luogo in cui si trova il pendolo?

L'espressione del periodo del pendolo è: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad\Rightarrow\quad g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \boldsymbol{9,6\,\frac{m}{s^2}}$

usando, per il periodo, il rapporto tra il tempo di 16 s e le 5 oscillazioni compiute in tale intervallo di tempo.

6. Una palla da croquet di 0,50 kg è inizialmente ferma sull'erba. Quando la palla viene colpita dalla mazza, la forza media esercitata su di essa è di 230 N. Se la velocità della palla dopo essere stata colpita è di 3,2 m/s, per quanto tempo la mazza è rimasta in contatto con la palla?

$$m = 0{,}50\ kg \qquad F_m = 230\ N \qquad v_0 = 0\frac{m}{s} \qquad v = 3{,}2\frac{m}{s} \qquad \Delta t = ?$$

Utilizzando il teorema dell'impulso:

$$I = F_m\,\Delta t = \Delta p \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta p}{F_m} = \frac{mv}{F_m} = \mathbf{7{,}0\ ms}$$

7. Un mulino a vento ha un momento angolare iniziale di 8500 kg m²/s. Il vento aumenta e 5,86 s più tardi il momento angolare è aumentato a 9700 kg m²/s. Qual è il valore del momento torcente sul mulino a vento, assumendo che esso si mantenga costante?

Considero l'espressione del secondo principio della dinamica in funzione del momento angolare:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{9700\ kg\frac{m^2}{s} - 8500\ kg\frac{m^2}{s}}{5{,}86\ s} = \mathbf{205\ Nm}$$

8. Perché quando si frena con un'automobile non bisogna bloccare le ruote?

Normalmente, una ruota ha un attrito statico con il fondo stradale. Se, però, si bloccano le ruote per frenare, l'attrito diventa dinamico perché le due superfici – quella delle ruote e quella del fondo stradale – sono in movimento l'una rispetto all'altra e l'attrito dinamico è inferiore rispetto all'attrito statico e, di conseguenza, lo spazio di frenata aumenta.

9. Definisci il prodotto vettoriale di due vettori.

Il prodotto vettoriale è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo tra essi compreso, la direzione è perpendicolare al piano individuato dai due vettori e il verso è individuato con la regola della mano destra.