1. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, di vertice $V\,(-3;\ 4\,)$ e passante per il punto $A\,(-1;\ 2\,)$. Determina inoltre l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto A.

Poiché vertice e fuoco hanno la stessa ordinata, la parabola richiesta ha asse parallelo all'asse x. Ovvero, l'equazione generica della parabola è: $x = ay^2 + by + c$.

Eguaglio l'ascissa generica del vertice a quella data e poi impongo il passaggio della parabola sia per V che per A:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ -3 = 16a + 4b + c \\ -1 = 4a + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -8a \\ 12a - 16a = -2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{b} = -4 \\ 2 - 8 + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$$

Perciò l'equazione della parabola è $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\, y^2 - 4\, y + 5}$.

Un procedimento alternativo (e sicuramente più rapido) può essere quello di considerare il fascio di parabole tangenti nel vertice alla retta parallela all'asse y passante per il vertice, ovvero:

$$x = -3 + k\,(y-4)^2$$

ed imporre il passaggio del fascio per il punto A, sostituendo le coordinate di A nel fascio:

$$-1 = -3 + 4k \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Da questo valore di k, sostituendolo nell'equazione del fascio, otteniamo l'equazione della parabola: $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\, y^2 - 4\, y + 5}$

Per determinare l'equazione della tangente alla parabola nel punto A, applico la formula di sdoppiamento:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2y - 4 \cdot \frac{y+2}{2} + 5$$

$$\frac{x-1}{2} = y - 2y - 4 + 5 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x + 2y - 3 = 0}$$

2. Determina l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = 2x^2 - 3x + 1$ parallela alla retta passante per i punti $A\ (1;\ 0)$ e $B\ (2;\ 3)$. Verifica che la retta tangente interseca la parabola nel suo punto di ascissa $\frac{3}{2}$. Determina inoltre l'area del segmento parabolico di estremi A e B.

Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta passante per A e B: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-0}{2-1} = \boldsymbol{3}$.

Considero ora il fascio di rette parallele alla retta passante per i punti A e B, ne determino l'equazione e la metto a sistema con l'equazione della parabola. Nell'equazione risolvente, pongo D = 0 per determinare il valore del parametro e in questo modo trovo la retta tangente con le caratteristiche richieste:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = 3x + q \end{cases} \qquad 2x^2 - 3x + 1 = 3x + q \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 6x + 1 - q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 2(1-q) = 0 \qquad q = -\frac{7}{2} \qquad\qquad t\!: \boldsymbol{y = 3x - \frac{7}{2}}$$

Per verificare che retta e parabola si intersecano nel punto di ascissa $\frac{3}{2}$, posso risolvere il sistema tra retta e parabola oppure, semplicemente, determinare il punto della parabola di ascissa data e verificare che le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta tangente:

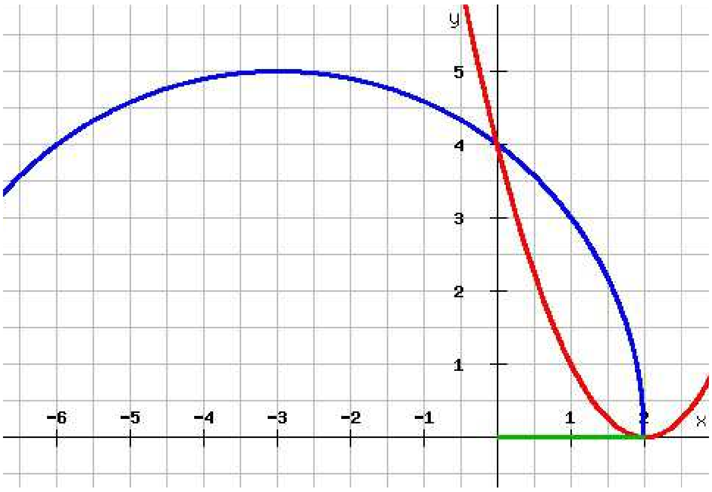
$$y = 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 1 \qquad\qquad 1 = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1\ \ c.v.d.$$

Per determinare l'area del segmento di parabola, determino innanzi tutto la lunghezza del segmento AB, poi calcolo la distanza di A dalla retta t e, sapendo che l'area del segmento parabolico è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo di base AB e altezza la distanza di A da t, determino l'area S richiesta:

$$d(A;t) = \frac{\left|3 - \frac{7}{2}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \qquad\qquad \overline{AB} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

3. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{16-6x-x^2} > x^2-4x+4$.



Dai due membri della disequazione, ricavo le equazioni di due funzioni: $y=\sqrt{16-6x-x^2}$ e $y=x^2-4x+4$.

La prima funzione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 16-6x-x^2 \end{cases}$$

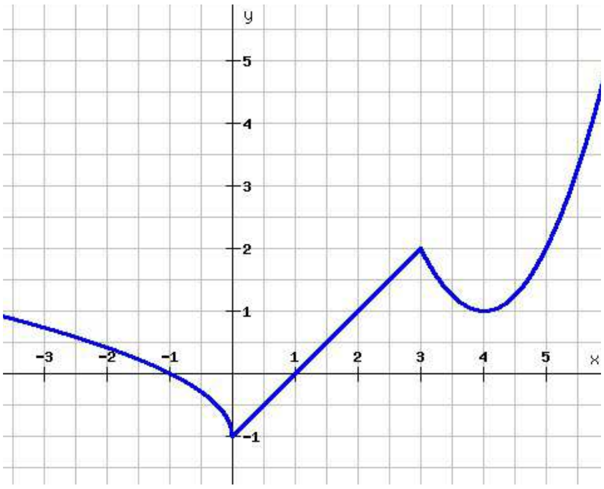
che rappresenta una metà circonferenza di centro $C(-3;0)$ e raggio 5.

La seconda funzione è una parabola di vertice $V\,(2;\ 0)$, che intercetta l'arco di circonferenza nel punto di coordinate $(0;4)$ e nel vertice.

Dal grafico possiamo dedurre la soluzione:

$$\mathbf{0 < x < 2}$$

4. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:



La prima parte del grafico è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x di vertice $V(0;\ -1)$ e passante per il punto dell'asse x di ascissa – 1. Per determinarla, consideriamo il fascio di parabole passanti per V e tangenti all'asse y e imponiamo il passaggio del fascio per il punto dell'asse x di ascissa – 1:

$$x=k\,(y+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad -1=k \quad \Longrightarrow \quad x=-(y+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad y+1=\sqrt{-x} \quad \Longrightarrow \quad y=-1+\sqrt{-x}$$

La seconda parte è rappresentata da una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante (coefficiente angolare 1) e di ordinata all'origine – 1: $y=x-1$.

La prima parte del grafico è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x di vertice $V(4;\ 1)$ e passante per il punto $A\,(3;2)$. Per determinarla, consideriamo il fascio di parabole passanti per V e tangenti alla retta $y=1$ e imponiamo il passaggio del fascio per il punto A:

$$y=1+k\,(x-4)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2=1+k \quad \Longrightarrow \quad y=1+(x-4)^2 \quad \Longrightarrow \quad y=x^2-8x+17$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases} -1+\sqrt{-x} & x \leq 0 \\ x-1 & 0 < x \leq 3 \\ x^2-8x+17 & x > 3 \end{cases}}$$

5. Nel fascio di parabole definito dalle parabole di equazioni: $y = x^2 + 4x + 4$ e $y = -x^2 + 4$, determina l'equazione:
   a. delle parabole degeneri;
   b. della parabola passante per il punto $P(2; -1)$;
   c. delle parabole con il vertice di ordinata $\frac{16}{3}$;
   d. della parabola con asse di simmetria x = 1.

Determino innanzi l'equazione del fascio, facendo la combinazione lineare delle due equazioni in forma implicita:

$$y - x^2 - 4x - 4 + k(y + x^2 - 4) = 0 \qquad y\,(k+1) + x^2\,(k-1) - 4x - 4\,(k+1) = 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{1-k}{k+1}\,x^2 + \frac{4}{k+1}\,x + 4 \qquad (2)$$

a. Per determinare le parabole degeneri, pongo uguali a zero i coefficienti di y e di x^2 nell'equazione (1):

$$k = -1 \qquad -2\,x^2 - 4x = 0 \qquad \boldsymbol{x\,(x+2) = 0}$$

$$k = 1 \qquad 2y - 4x - 8 = 0 \qquad \boldsymbol{y = 2x + 4}$$

b. Per determinare l'equazione della parabola passante per P, sostituisco le coordinate di P nell'equazione (1) del fascio:

$$-k - 1 + 4\,(k-1) - 8 - 4\,(k+1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = -17$$

Sostituendo il valore ottenuto nell'equazione (2) del fascio, ottengo l'equazione della parabola richiesta:

$$\boldsymbol{y = -\frac{9}{8}\,x^2 - \frac{1}{4}x + 4}$$

c. Usando l'equazione (2) del fascio, determino l'ordinata del vertice e la pongo uguale al dato fornito dal testo:

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{16}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad 3b^2 - 12ac + 64a = 0$$

$$3 \cdot \frac{16}{(k+1)^2} - 12 \cdot \frac{1-k}{k+1} \cdot 4 + 64 \cdot \frac{1-k}{k+1} = 0$$

$$3 - 3\,(1-k^2) + 4\,(1-k^2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \pm 2$$

Sostituendo i due valori di k così ottenuti nel fascio di equazione (2), otteniamo le due parabole che hanno i requisiti richiesti:

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 4} \qquad \boldsymbol{y = -3x^2 - 4x + 4}$$

d. Usando l'equazione (2) del fascio, determino l'ascissa del vertice e la pongo uguale al dato fornito dal testo (l'ascissa del vertice ha lo stesso valore numerico del termine noto dell'equazione dell'asse di simmetria):

$$-\frac{b}{2a} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad b + 2a = 0$$

$$\frac{4}{k+1} + 2 \cdot \frac{1-k}{k+1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - k + 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 3$$

Sostituendo il valore di k così ottenuto nel fascio di equazione (2), otteniamo la parabola che ha i requisiti richiesti:

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4}$$