1. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione $x^2 + ky^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ rappresenta una circonferenza, una parabola con asse parallelo agli assi coordinati, un'iperbole, un'ellisse.

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali:

$$\boldsymbol{k = 1}$$

B. Perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse y, il coefficiente del termine di secondo grado in y deve essere nullo; perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse x, il coefficiente del termine di secondo grado in x deve essere nullo e questo non può verificarsi, perciò:

$$\boldsymbol{k = 0}$$

C. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi:

$$\boldsymbol{k < 0}$$

D. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i coefficienti dei termini di secondo grado e il coefficiente s devono essere concordi, perciò entrambi positivi (visto che il coefficiente del termine di secondo grado in x vale 1). Cominciamo con il determinare l'equazione canonica dell'ellisse, con il completamento del quadrato:

$$(x^2 - 2x + 1) + k\left(y^2 + \frac{4}{k}y + \frac{4}{k^2}\right) = 1 + 1 + \frac{4}{k}$$

Ora abbiamo il coefficiente s che è il secondo membro dell'equazione:

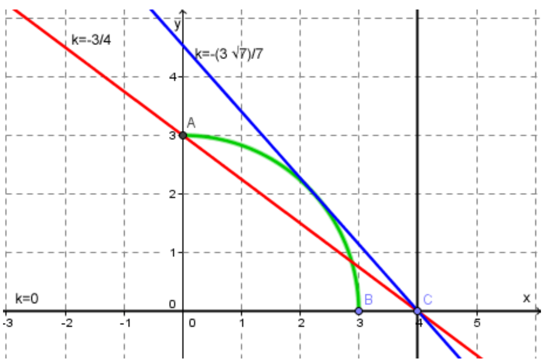
$$\begin{cases} k > 0 \\ 2 + \dfrac{4}{k} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k > 0 \\ \dfrac{k+2}{k} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k > 0 \\ k \leq -2 \quad \vee \quad k > 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{k > 0}$$

2. Determina le soluzioni del seguente sistema, al variare del parametro k, con il metodo grafico:

$$\begin{cases} \sqrt{9 - x^2} - kx + 4k = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ y - kx + 4k = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \quad \wedge \quad y \geq 0 \\ y - kx + 4k = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$



Si tratta di una semicirconferenza, con centro nell'origine e raggio 3 e di un fascio proprio di rette di centro $(4; 0)$.
Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\ (0; 3)$:

$$3 - 0 + 4k = 0 \qquad k = -\frac{3}{4}$$

Il passaggio per $B\ (3; 0)$ mi dà la generatrice $y = 0$ che si ottiene per $k = 0$.
Determino la tangente, ponendo la distanza del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio:

$$\frac{|\,4k\,|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3 \qquad 9k^2 - 16k^2 + 9 = 0 \qquad k_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Il valore da scegliere è quello negativo. Si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per} \quad -\frac{3}{4} \leq k \leq 0 \qquad\qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per} \quad -\frac{3\sqrt{7}}{7} \leq k < -\frac{3}{4}$$

3. Risolvi graficamente il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} 9x^2+4y^2-54x+8y+49<0 \\ x^2+y^2-6x+2y\geq -6 \end{cases}$

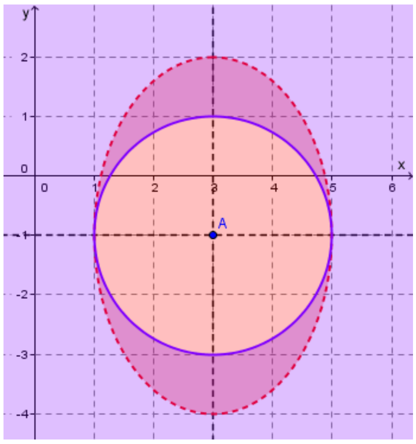
La prima equazione rappresenta la parte interna di un'ellisse traslata, escluso il bordo, che, infatti, nell'immagine a lato è tratteggiato:

$$9\,(x^2-6x+9)+4\,(y^2+2y+1)=-49+81+4$$

$$9\,(x-3)^2+4\,(y+1)^2=36$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Si tratta di un'ellisse di centro $A\,(3;\,-1)$ con semiasse maggiore (quello verticale) pari a 3 e semiasse minore pari a 2.
La seconda equazione rappresenta la parte esterna di una circonferenza di centro A e raggio 2, compreso il bordo, che, infatti, nell'immagine a lato è continuo.
La parte in comune è rappresentata da quella più marcata nel disegno a lato.



4. Trasla il poligono di vertici $A\,(1;3)$, $B\,(2;1)$, $C\,(5;7)$ e $D\,(0;4)$ secondo il vettore $\vec{v}\,(3;\,-4)$ e scrivi le equazioni della traslazione.

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x+3} \\ \boldsymbol{y'=y-4} \end{cases}$.

Sostituendo le coordinate dei quattro punti nelle equazioni della traslazione, otteniamo le coordinate dei punti traslati:

$$A\,(1;3)\xrightarrow{\vec{v}\,(3;\,-4)}\boldsymbol{A'(4;\,-1)}$$

$$B\,(2;1)\xrightarrow{\vec{v}\,(3;\,-4)}\boldsymbol{B'(5;\,-3)}$$

$$C\,(5;7)\xrightarrow{\vec{v}\,(3;\,-4)}\boldsymbol{C'(8;\,3)}$$

$$D\,(0;4)\xrightarrow{\vec{v}\,(3;\,-4)}\boldsymbol{D'(3;\,0)}$$

5. Al triangolo ABC, di vertici $A\,(-2;3)$, $B\,(3;4)$ e $C\,(5;5)$, viene applicata una traslazione e la sua immagine A'B'C' ha come baricentro $G'(-1;2)$. Trova le coordinate di A', B' e C'.

Determino innanzi tutto le coordinate del baricentro G del triangolo ABC:

$$G\left(\frac{-2+3+5}{3};\frac{3+4+5}{3}\right)=(2;4)$$

Conoscendo il punto G e il suo traslato G', posso trovare le equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y-2 \end{cases}$$

Applico ora la traslazione al triangolo di vertici A, B e C:

$$A\,(-2;3)\xrightarrow{\vec{v}\,(-3;\,-2)}\boldsymbol{A'(-5;\,1)}$$

$$B\,(3;4)\xrightarrow{\vec{v}\,(-3;\,-2)}\boldsymbol{B'(0;\,2)}$$

$$C\,(5;5)\xrightarrow{\vec{v}\,(-3;\,-2)}\boldsymbol{C'(2;\,3)}$$

6. Qual è l'immagine della retta *r*, di coefficiente angolare – 4 e passante per $(-2; 1)$, nella traslazione di vettore $\vec{v}\ (1;\ -1)$?

Determino innanzi tutto l'equazione della retta r: $y - 1 = -4\,(x + 2)$
Applico poi la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

$$y' + 1 - 1 = -4\,(x' - 1 + 2)$$

Perciò l'immagine di r è:

$$\boldsymbol{y = -4x - 4}$$

7. Sono dati i vertici di un quadrilatero: $A\ (-4; 2)$, $B\ (-6; 2)$, $C\ (-7; 0)$ e $D\ (-4; 0)$. Determina il poligono simmetrico rispetto al punto $(-2; 1)$ e rappresenta i due poligoni.

Le equazioni della simmetria sono:

$$\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$$

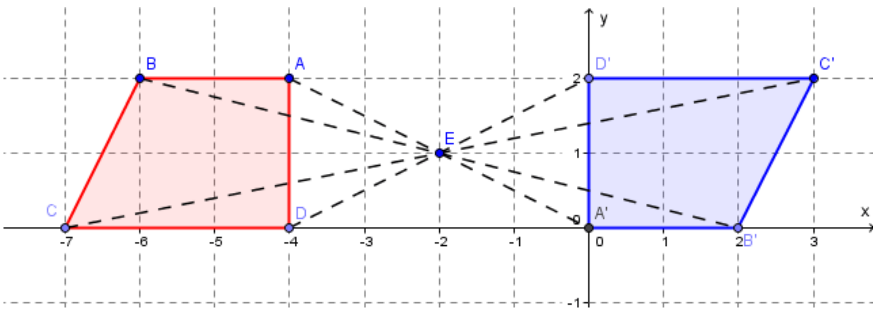
Trasformiamo i punti:

$$A\ (-4; 2) \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{A'(0;\ 0)}$$

$$B\ (-6; 2) \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{B'(2;\ 0)}$$

$$C\ (-7; 0) \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{C'(3;\ 2)}$$

$$D\ (-4; 0) \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{D'(0;\ 2)}$$



8. Scrivi l'equazione della curva simmetrica di $xy = 3$ rispetto al punto $M\ (-2;\ -1)$.

Le equazioni della simmetria e della sua reciproca sono:

$$\begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = -2 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 - x' \\ y = -2 - y' \end{cases}$$

Trasformiamo la curva:

$$(-4 - x)(-2 - y) = 3 \qquad (x + 4)(y + 2) = 3$$

$$y + 2 = \frac{3}{x + 4} \qquad \boldsymbol{y = -\frac{2x + 5}{x + 4}}$$

Risolvi:

9. $\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cosec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\,tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{2})+2\cdot(-1)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2=\mathbf{-2}$$

10. $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=\frac{1}{cos\,x}\,ctg\,x+\cos x-\frac{1}{sen\,x}=\frac{1}{sen\,x}+cos\,x-\frac{1}{sen\,x}=\boldsymbol{cos\ x}$$

11. $tg\,(\pi-x)\,ctg\,x-ctg\,(\pi-x)\,tg\,x$

$$=-tg\,x\,ctg\,x+ctgx\,tgx=-1+1=\mathbf{0}$$

12. $[\,tg\,(\pi+x)+tgx\,]\,cosec\,(\pi+x)-\sec\,(\pi+x)$

$$=[tg\,x+tg\,x]\cdot\frac{1}{-sen\,x}-\frac{1}{-\cos x}=2\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot\frac{1}{-sen\,x}+\frac{1}{\cos x}=-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}=\boldsymbol{-\frac{1}{cos\,x}}$$