Calcola i seguenti integrali:

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx$$

$$\int \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\boldsymbol{\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c}$$

$$\int \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-4\,x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=\boldsymbol{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+c}$$

$$\int \frac{2x^3+x^2-9}{2x-3}dx$$

$$\int \frac{2x^3-3x^2+4x^2-6x+6x-9}{2x-3}dx=\int\frac{x^2(2x-3)+2x(2x-3)+3(2x-3)}{2x-3}dx=$$

$$=\int(x^2+2x+3)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+c}$$

$$\int x\sqrt{2+3x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{6}\int 6x\,(2+3x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{6}\frac{(2+3x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\boldsymbol{\frac{\sqrt{(2+3x^2)^3}}{9}+c}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx$$

$$-\frac{1}{4}\int\left(-4x^3\,(1-x^4)^{-\frac{1}{4}}\right)dx=-\frac{1}{4}\frac{(1-x^4)^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+c=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\sqrt[4]{(1-x^4)^3}+c}$$

$$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{x}\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+c}$$

$$\int\frac{\cos x+1}{\sin x+x}dx$$

$$=\boldsymbol{\ln|\sin x+x|+c}$$

$$\int\left(\frac{\cos x}{\sin^3 x}+\frac{\cos x-e^x}{2\sin x-2e^x}\right)dx$$

$$\int\left(\cos x\cdot\sin^{-3}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x-e^x}{\sin x-e^x}\right)dx=\frac{\sin^{-3+1}x}{-3+1}+\frac{1}{2}\ln|\sin x-e^x|+c=$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\sin x-e^x|+c}$$

1. Determina i punti della parabola di equazione $y^2 = 6x$ per i quali è massimo il rapporto $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{PF}^2}$, essendo F il fuoco e O il vertice della parabola.

Il fuoco della parabola ha coordinate: $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right) = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$, mentre il vertice è nell'origine. Il generico punto della parabola ha coordinate: $P\left(\frac{1}{6}k^2; k\right)$. Determiniamo quindi la funzione:

$$f(k) = \frac{\frac{1}{36}k^4 + k^2}{\frac{1}{36}k^4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}k^2 + k^2} = \frac{k^4 + 36\,k^2}{k^4 + 18\,k^2 + 81} = \frac{k^4 + 36\,k^2}{(k^2+9)^2}$$

Calcolo la derivata della funzione determinata:

$$f'(k) = \frac{(4k^3 + 72\,k)(k^2+9)^2 - 2 \cdot 2k\,(k^2+9)(k^4 + 36\,k^2)}{(k^2+9)^4} =$$

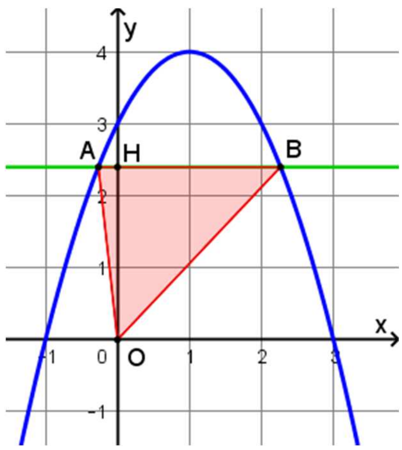
$$= \frac{36\,k\,(-k^2+18)}{(k^2+9)^3} \geq 0$$

		$-3\sqrt{2}$		0		$3\sqrt{2}$	
	$-$		$-$		$+$		$+$
	$-$		$+$		$+$		$-$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

I due punti di massimo sono $\boldsymbol{(3; 3\sqrt{2})}$ e $\boldsymbol{(3; -3\sqrt{2})}$.

2. È data la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$. Fra tutti i triangoli aventi un vertice nell'origine e gli altri due in punti della curva aventi la stessa ordinata positiva, trova quello di area massima.

1° modo:
Considero la retta parallela all'asse x di equazione $y = k$: intersecandola con la parabola, ottengo le coordinate dei punti A e B:



$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = k \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 3 + k = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4-k}$$

Il triangolo ABO ha base $\overline{AB} = |x_B - x_A| = 2\sqrt{4-k}$ e altezza $\overline{OH} = k$, perciò l'area è:

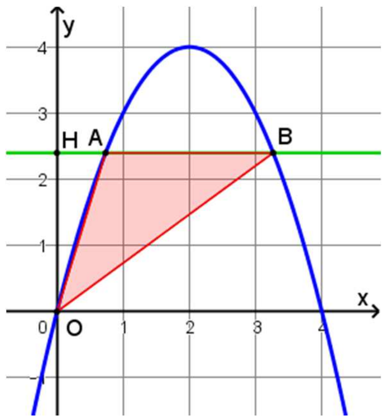
$$f(k) = \frac{1}{2}k \cdot 2\sqrt{4-k} = k\sqrt{4-k}$$

Calcolo la derivata della funzione determinata:

$$f'(k) = \sqrt{4-k} + k \cdot \frac{-1}{2\sqrt{4-k}} = \frac{8-3k}{2\sqrt{4-k}} \geq 0$$

La derivata prima ci mostra come si comporta la funzione in termini di crescenza e siccome è positiva per $k \leq \frac{8}{3}$, allora $\frac{8}{3}$ è un punto di massimo e l'area massima ha valore $\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{9}}$.

2° modo:
Considero la parabola ottenuta da quella del testo, ma traslata lungo l'asse x di un'unità, ovvero di equazione $y = -x^2 + 4x$. Il punto A ha coordinate $A(x; -x^2 + 2x + 3)$ e il punto B, invece, ha ascissa $4 - x$ e ordinata uguale a quella di A.



Il triangolo ABO ha base $\overline{AB} = |x_B - x_A| = 4 - 2x$ e altezza $\overline{OH} = -x^2 + 2x + 3$, perciò l'area è:

$$f(x) = \frac{1}{2}(4-2x)\,(-x^2 + 4x) = (2-x)(-x^2+4x)$$

Calcolo la derivata della funzione determinata:

$$f'(x) = x^2 - 4x + (2-x)(-2x+4) = 3x^2 - 12\,x + 8 \geq 0$$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad f'(x) \geq 0$ per valori esterni, perciò la funzione ha massimo in $x = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ e l'area massima ha valore $\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{9}}$.