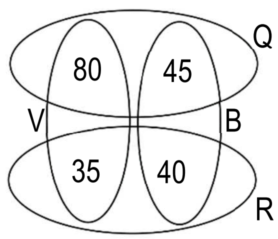
1. Un'urna contiene 3 palline bianche e 2 verdi. Se ne estraggono 2 in blocco: è più probabile che siano dello stesso colore o di colori diversi?

Calcoliamo la probabilità che siano dello stesso colore, ovvero entrambe bianche o entrambe verdi: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

È più probabile che siano di **colore diverso**, visto che la probabilità che siano di colore diverso è di $\frac{3}{5}$.

2. In una scatola ci sono 200 gettoni; 125 gettoni sono quadrati, di cui 80 verdi e 45 blu, e 75 gettoni sono rotondi, di cui 35 verdi e 45 blu. Si estrae un gettone. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

D. Qual è la probabilità di estrarre un gettone quadrato oppure verde?
E. Qual è la probabilità di estrarre un gettone rotondo ma non blu?
F. Sapendo che è stato estratto un gettone quadrato, qual è la probabilità che sia blu?



A. Secondo il diagramma a lato, indicando con Q l'evento gettone quadrato e con V l'evento gettone verde, abbiamo:

$$p(Q)=\frac{125}{200} \qquad p(V)=\frac{115}{200} \qquad p(Q\cap V)=\frac{80}{200}$$

Applicando il teorema della somma logica di eventi compatibili, otteniamo:

$$p(Q\cup V)=p(Q)+p(V)-p(Q\cap V)=\frac{125}{200}+\frac{115}{200}-\frac{80}{200}=\frac{160}{200}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

Oppure si può calcolare la probabilità contraria a quella di estrarre un gettone blu rotondo:

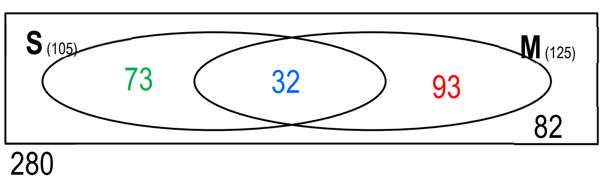
$$1-\frac{40}{200}=\frac{160}{200}=\frac{4}{5}$$

B. La probabilità di un gettone rotondo ma non blu è, secondo il diagramma rappresentato, quella di estrarre un gettone verde e rotondo, data da: $\frac{35}{200}=\mathbf{\frac{7}{40}}$

C. Devo applicare il teorema della probabilità condizionata: $p(B|Q)=\frac{45}{125}=\mathbf{\frac{9}{25}}$.

3. Su 280 dipendenti di un'azienda, coloro che passeranno le proprie ferie al mare sono 105, quelli che andranno in montagna sono 125, mentre quelli che resteranno a casa sono 82. Scelto a caso un dipendente, qual è la probabilità (in percentuale) che vada sia al mare che in montagna?

Rappresento la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, dove indico con S l'insieme dei dipendenti che vanno al mare e con M l'insieme dipendenti che andranno in montagna:



Sapendo che i dipendenti in totale sono 280 e che 82 resteranno a casa:

$$280-82=198$$

198 è il numero dei dipendenti che vanno in vacanza, ovvero è la cardinalità dell'insieme $S\cup M$.

Ma sommando gli elementi di S e M, otteniamo un totale di 230, con un eccesso di 32, ovvero:

$$230-198=\mathbf{32}$$

La probabilità che un dipendente vada sia al mare che in montagna è data quindi da: $p=\frac{32}{280}=\frac{4}{35}=\mathbf{11,4\%}$

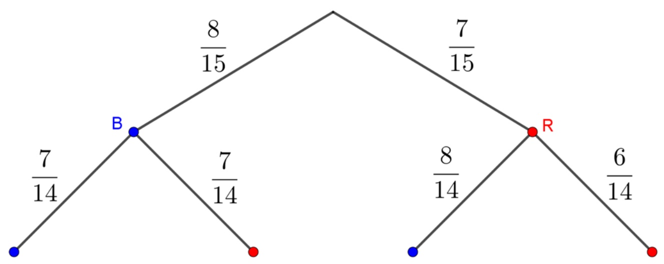
Oppure, usando il teorema della somma logica per eventi compatibili:

$$p(S\cup M)=p(S)+p(M)-p(S\cap M) \qquad \Rightarrow \qquad p(S\cap M)=p(S)+p(M)-p(S\cup M)$$

Ma per la probabilità contraria: $p(S\cup M)=1-p(\overline{S\cup M})=1-\frac{82}{280}=\frac{198}{280}$.

Perciò: $p(S\cap M)=\frac{105}{280}+\frac{125}{280}-\frac{198}{280}=\frac{32}{280}=\mathbf{11,4\%}$.

4. In un'urna ci sono 8 palline blu e 7 palline rosse. Un tuo amico estrae una pallina, ma non ti dice quale colore ha estratto. Qual è la probabilità che tu estragga una pallina rossa?

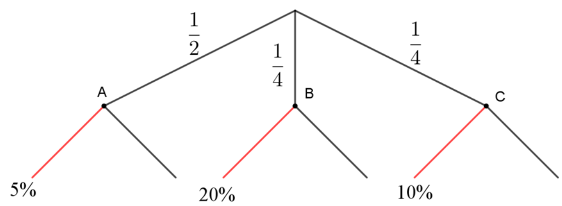


Una volta rappresentata la situazione con un diagramma ad albero, diventa più facile risolvere il quesito. Abbiamo due situazioni: nel caso in cui l'amico abbia estratto una pallina blu (probabilità $8/15$), ho una probabilità di $7/14$ di estrarre una pallina rossa, mentre se l'amico ha estratto la pallina rossa (probabilità $7/15$), la probabilità di estrarre una pallina rossa è di $6/14$, perciò:

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}+\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{14}=\mathbf{\frac{7}{15}}$$

5. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso, con la probabilità di estrarre la scatola A pari a ½, visto che è la più grande, mentre le altre hanno la stessa probabilità, e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

Possiamo facilmente rappresentare la situazione con un diagramma ad albero, dove la scelta delle tre scatole occupa i tre rami principali, con probabilità diverse di essere scelte.
Ad ogni scatola, associo la probabilità di estrarre la lampada difettosa, indicata al termine del ramo rosso di ogni scatola.
Possiamo calcolare a questo punto la probabilità richiesta:



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{4}\cdot\frac{20}{100}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{100}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

6. In un'urna ci sono alcune biglie, rosse o nere. Stabilisci qual è la percentuale delle biglie rosse, sapendo che la probabilità di estrarre almeno una biglia rossa in 2 estrazioni con reimmissione è del 64%.

Indichiamo con $1-x$ la probabilità di estrarre una biglia rossa. La probabilità di estrarre almeno una biglia rossa è la probabilità contraria di non estrarre nemmeno una biglia rossa, ovvero la probabilità di estrarre due biglie nere. Sapendo che la probabilità di estrarre una biglia nera è x, l'equazione diventa:

$$1-x^2=\frac{64}{100}\qquad x^2=\frac{36}{100}\qquad x=\frac{6}{10}$$

Le biglie rosse sono il **60%** delle biglie contenute nell'urna.

7. Qual è la probabilità che al gioco del lotto il numero 15 non esca nelle prossime 13 estrazioni, ma esca alla quattordicesima? Ricorda che, nel gioco del lotto, ogni volta per ogni ruota, vengono estratti senza reimmissione cinque numeri da un'urna contenente i numeri dall'uno al novanta.

La probabilità che il 15 non esca in una delle tredici estrazioni è data da:

$$\frac{89}{90}\cdot\frac{88}{89}\cdot\frac{87}{88}\cdot\frac{86}{87}\cdot\frac{85}{86}=\frac{85}{90}=\frac{17}{18}$$

Ogni estrazione è indipendente dalla precedente, perciò la probabilità che non esca 15 in nessuna delle prossime 13 estrazioni è data da:

$$\left(\frac{17}{18}\right)^{13}$$

L'evento "esce il 15 in un'estrazione" è l'evento contrario a "il 15 non esce nell'estrazione", perciò la probabilità che il 15 esca è data da:

$$1-\frac{17}{18}=\frac{1}{18}$$

Possiamo quindi concludere il calcolo: $\left(\frac{17}{18}\right)^{13}\cdot\frac{1}{18}=\mathbf{2,64\%}$

8. Due eventi A e B sono equiprobabili e indipendenti. Sapendo che $p(A \cup B) = 75\%$, quanto vale la probabilità dell'evento A?

(Esercizio 201 p.63, dal libro Francesco Daddi, Calcolo delle probabilità, Edizione EBS print)

Dato che i due eventi sono equiprobabili: $p(A) = p(B)$

Dato che i due eventi sono indipendenti: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Per il teorema della somma logica di eventi compatibili: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$

Ovvero: $$p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{75}{100} \quad \Rightarrow \quad p(A) + p(A) - p(A) \cdot p(A) = \frac{3}{4}$$

Ponendo: $p(A) = x$

Otteniamo l'equazione: $$x + x - x \cdot x = \frac{3}{4}$$

$$4\,x^2 - 8\,x + 3 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Visto che quella che sto calcolando è una probabilità, il risultato deve essere minore di 1, perciò è accettabile solo la seconda soluzione, ovvero la probabilità dell'evento A è pari al $\mathbf{50\%}$.

9. Trenta palline sono poste in un'urna. Quattordici sono rosse, cinque verdi, tre gialle e otto bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valuti la probabilità di estrarre tre palline di colori uguali.

La probabilità totale sarà data dalla somma delle probabilità di avere 3 palline rosse, tre verdi, tre gialle e tre bianche:

$$\frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{3}{28} + \frac{3}{30} \cdot \frac{2}{29} \cdot \frac{1}{28} + \frac{8}{30} \cdot \frac{7}{29} \cdot \frac{6}{28} = \frac{431}{4060} = \mathbf{10,6\%}$$

10. Un oggetto fabbricato da un macchinario può presentare due tipi di difetti (A e B). La probabilità che un oggetto presenti il difetto A è $\frac{3}{10}$, la probabilità che presenti il difetto B è $\frac{1}{5}$, la probabilità che presenti entrambi i difetti è $\frac{1}{10}$.

A. Qual è la probabilità che presenti almeno un difetto?
B. Qual è la probabilità che l'oggetto non presenti neanche un difetto?
C. Qual è la probabilità che presenti solo il difetto A?
D. Qual è la probabilità che presenti solo il difetto B?

(Esercizio 206 p.65, dal libro Francesco Daddi, Calcolo delle probabilità, Edizione EBS print)

$$p(A) = \frac{3}{10} \qquad p(B) = \frac{1}{5} \qquad p(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

A. I due eventi sono compatibili e, per il teorema della somma logica, ottengo: $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

B. L'evento "l'oggetto non presenta neanche un difetto" è l'evento contrario del precedente: $$1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

C. L'insieme per cui presenta solo il difetto A è dato da: $A - B = A \cap \bar{B}$ $$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

D. Analogamente per il difetto B: $B - A = \bar{A} \cap B$ $$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$