Problema 1

L'ellisse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ interseca l'asse x nei punti A e B e l'ascissa di A è negativa. Detti rispettivamente P e Q i punti del primo e quarto quadrante ottenuti intersecando l'ellisse con la parallela all'asse delle y passante per il fuoco F_1 di ascissa positiva, si verifichi che l'origine degli assi è il baricentro del triangolo PAQ. Si determinino:

A. la misura del perimetro e dell'area del triangolo;
B. l'equazione della retta contenente la mediana uscente da Q;
C. l'equazione della parabola passante per P, Q, M, essendo M il punto medio di AP.

Le intersezioni dell'ellisse con l'asse x corrispondono ai vertici dell'ellisse sull'asse x, perciò: $A\,(-6;0)$ $B\,(6;0)$

Determiniamo le coordinate del fuoco F_1: $a^2=36$ $b^2=27$ $c^2=a^2-b^2=9$ $F_1\,(3;0)$

La retta parallela all'asse delle y passante per il fuoco F_1 ha equazione: $x=3$. Per determinare le coordinate dei punti P e Q, metto a sistema l'equazione dell'ellisse e quella della retta:

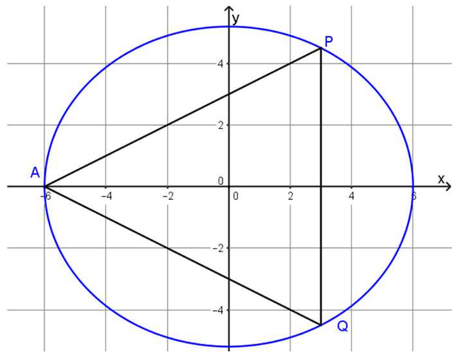
$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1\\ x=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3\\ \frac{9}{36}+\frac{y^2}{27}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3\\ \frac{y^2}{27}=\frac{3}{4}\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3\\ y=\pm\frac{9}{2}\end{cases}$$

Le coordinate dei punti P e Q sono: $P\,\left(3;\frac{9}{2}\right)$ e $Q\,\left(3;-\frac{9}{2}\right)$.

Determiniamo le coordinate del baricentro del triangolo PAQ: $G\,\left(\frac{x_P+x_A+x_Q}{3};\frac{y_P+y_A+y_Q}{3}\right)=(0;0)\equiv O$

Il baricentro coincide con l'origine degli assi, come previsto.

A. Il triangolo è isoscele, dato che uno dei vertici si trova sull'asse x e gli altri due sono simmetrici rispetto all'asse x:



$$\overline{AQ}=\overline{AP}=\sqrt{9^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}\sqrt{5}\qquad \overline{PQ}=|y_P-y_Q|=9$$

$$2p_{PAQ}=\frac{9}{2}\sqrt{5}+\frac{9}{2}\sqrt{5}+9=\mathbf{9\,(1+\sqrt{5})}$$

Per determinare l'area, calcolo l'altezza del triangolo determinando la distanza del vertice A dal segmento PQ, ovvero dalla retta $x=3$:

$$h=d\,(A;x=3)=|-6-3|=9\qquad A=\frac{h\cdot\overline{PQ}}{2}=\mathbf{\frac{81}{2}}$$

B. La mediana uscente da Q passerà sicuramente per l'origine degli assi, perciò ha equazione: $y=\frac{-\frac{9}{2}}{3}x$ $\qquad \boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x}$

C. Determino il punto medio M del lato AP: $M=\left(\frac{-6+0}{2};\frac{0+\frac{9}{2}}{2}\right)=\boldsymbol{\left(-3;\frac{9}{4}\right)}$

La parabola, visto che passa per due punti P e Q simmetrici rispetto all'asse x, ha asse parallelo all'asse x, anzi, coincidente con l'asse x, perciò ha equazione generica: $x=ay^2+c$. Sostituendo le coordinate di due punti, P e M, nell'equazione, determino i parametri:

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}=\frac{81}{16}a+c\\ 3=\frac{81}{4}a+c\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{9}{2}=\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{16}\right)a\\ c=3-\frac{81}{4}a\end{cases}\qquad \begin{cases}a=\frac{9}{2}\cdot\frac{16}{3\cdot 81}=\frac{8}{27}\\ c=3-\frac{81}{4}\cdot\frac{8}{27}=-3\end{cases}$$

L'equazione della parabola è:

$$\boldsymbol{x=\frac{8}{27}y^2-3}$$

Problema 2

La piazza di un paese ha una forma ellittica, con gli assi di 16 m e 12 m.

A. Il sindaco del paese vuole rifare la pavimentazione e ha un budget di 25.000 €. Se, tra manodopera e materiali, la spesa prevista è di 150 €/m², il sindaco potrà realizzare il suo progetto?

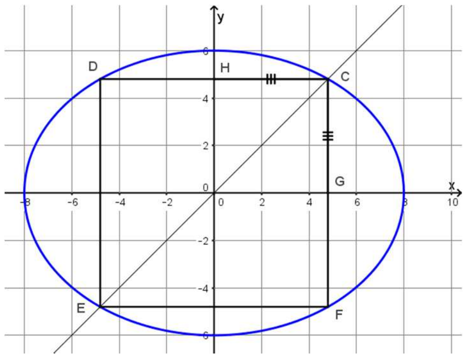
B. All'interno della piazza, durante i mesi invernali, viene realizzata una struttura di forma quadrata, per consentire il pattinaggio su ghiaccio ai bambini. Sapendo che per ogni pattinatore dovrebbero essere disponibili circa 4 m², quanti bambini può accogliere contemporaneamente la pista?

C. La linea elettrica che illumina la piazza tocca tangenzialmente il suo perimetro: sapendo che essa è parallela alla linea congiungente i punti A e B, determina, sull'arco AB, le coordinate del punto in cui verrà piantato uno dei pali.

A. L'area dell'ellisse si calcolo facendo il prodotto dei semiassi per π. Una volta determinata l'area della piazza, la moltiplico per la spesa prevista al m² e potrò sapere se il sindaco avrà abbastanza fondi per realizzare il suo progetto:

$$8\,m \cdot 6\,m \cdot \pi \cdot 150\,€/m^2 = 22619\,€ < 25000\,€$$

Il progetto può essere realizzato.



B. Per determinare il lato del quadrato inscritto nell'ellisse, come si può notare nella figura a lato, grazie alle simmetrie dell'ellisse, basta determinare l'intersezione del primo quadrante tra la bisettrice di primo e terzo quadrante e l'ellisse. Le coordinate del punto C saranno pari a metà del lato del quadrato richiesto:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \\ x = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 36\,x^2 + 64\,x^2 = 64 \cdot 36 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 + 16x^2 = 16 \cdot 36 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{24}{5} \\ y = \dfrac{24}{5} \end{cases}$$

Il lato del quadrato ha lunghezza $\frac{24}{5} \cdot 2\,m = 9{,}6\,m$. Ne determiniamo l'area facendo il quadrato del lato e poi dividiamo il risultato così ottenuto per 4 m², il posto necessario per ogni pattinatore:

$$\frac{(9{,}6\,m)^2}{4\,m^2} = \left(\frac{9{,}6}{2}\right)^2 = 23{,}04$$

I bambini che possono occupare contemporaneamente la pista sono **23**.

C. Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B (vertici dell'ellisse di coordinate positive), poi considero il fascio improprio di rette parallele alla retta data, lo metto a sistema con l'equazione dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente, per ottenere la retta tangente all'ellisse parallela alla retta data. Una volta determinata l'equazione, calcolo l'intersezione tra la retta e l'ellisse, in modo da determinare le coordinate del punto in cui verrà piantato uno dei pali della linea elettrica.

$$A\,(8;0) \quad B\,(0;6) \qquad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-0}{0-8} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + q \end{cases} \qquad 36\,x^2 + 64\left(-\frac{3}{4}x + q\right)^2 = 64 \cdot 36 \qquad 9x^2 + 16\left(\frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}xq + q^2\right) = 16 \cdot 36$$

$$9x^2 + 9x^2 - 24\,xq + 16\,q^2 - 16 \cdot 36 = 0 \qquad 9x^2 - 12\,xq + 8q^2 - 288 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36\,q^2 - 9\,(8q^2 - 288) = 0 \qquad 9\,q^2 - 18\,q^2 + 9 \cdot 72 = 0 \qquad q^2 = 72 \qquad q = \pm 6\sqrt{2}$$

La tangente che mi interessa ha ordinata all'origine positiva, visto che interseca l'ellisse nel primo quadrante (si parla di arco AB). Posso ora determinare le coordinate del punto di intersezione:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{64} = 1 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 6\sqrt{2} \end{cases} \qquad 9x^2 - 72\sqrt{2}\,x + 288 = 0 \qquad x^2 - 8\sqrt{2}\,x + 32 = 0 \qquad \left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

Il punto di intersezione ha coordinate: $\boldsymbol{P\,\left(4\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right)}$.

Questionario

1. Determina l'equazione dell'iperbole, avente per asse trasverso l'asse y, passante per i punti $\left(5\sqrt{3}; 8\right)$ e $\left(-\frac{15}{4};\ -5\right)$.

La generica equazione dell'iperbole con asse trasverso sull'asse y è: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Sostituisco le coordinate dei due punti dati nell'equazione e determino così i parametri a e b. Per facilitare il calcolo, pongo: $\frac{1}{a^2}=A$ e $\frac{1}{b^2}=B$:

$$\begin{cases} 75\,A-64\,B=-1 \\ \frac{225}{16}A-25\,B=-1 \end{cases}$$
$$75\cdot\frac{13}{16}A-39B=0$$
$$\begin{cases} B=\frac{25}{16}A \\ 75\,A-100\,A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{25} \\ B=\frac{1}{16} \end{cases}$$

L'equazione dell'iperbole è:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=-1}$$

2. Determina le equazioni delle tangenti alla funzione $y=\frac{2x-3}{x+1}$ condotte dal punto $\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Il punto dato appartiene all'iperbole, infatti: $-\frac{1}{2}=\frac{2-3}{1+1}$. Posso quindi applicare la formula di sdoppiamento:

$$c\,\frac{xy_o+x_oy}{2}+d\,\frac{y+y_o}{2}=a\,\frac{x+x_o}{2}+b$$

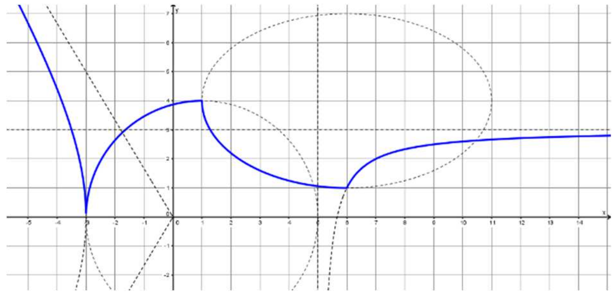
Dove a, b, c e d sono i coefficienti dell'equazione dell'iperbole e $(x_o;y_o)$ sono le coordinate del punto di tangenza:

$$\frac{-\frac{1}{2}x+y}{2}+\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=2\,\frac{x+1}{2}-3 \qquad -x+2y+2y-1=4x+4-12$$

L'equazione della tangente è:

$$\boldsymbol{5x-4y=7}$$

3. Determina l'equazione del seguente grafico:



La prima conica partendo da sinistra è un'iperbole con centro di simmetria nell'origine degli assi, equazione generica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, asintoti $y = \pm\frac{5}{3}x$ e vertice $A_2(-3; 0)$, perciò:

$$a^2 = 9 \qquad b^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \qquad \boldsymbol{y = \frac{5}{3}\sqrt{x^2 - 9}}$$

La seconda conica è una circonferenza di centro $(1; 0)$ e raggio 4:

$$(x-1)^2 + y^2 = 16 \qquad y = \sqrt{16 - (x-1)^2} \qquad \boldsymbol{y = \sqrt{15 + 2x - x^2}}$$

La terza è un'ellisse con centro di simmetria $(6; 4)$, assi di lunghezza 10 e 6, perciò:

$$\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \qquad y = 4 - \frac{3}{5}\sqrt{25 - (x-6)^2} \qquad \boldsymbol{y = 4 - \frac{3}{5}\sqrt{12\,x - x^2 - 11}}$$

L'ultima è una funzione omografica di centro $(5; 3)$ e passante per il punto $(6; 1)$, ovvero è una traslazione di vettore $\vec{v}\,(5; 3)$ dell'iperbole $xy = -2$:

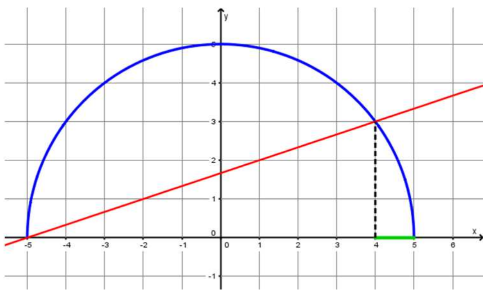
$$(x-5)(y-3) = -2 \qquad y - 3 = \frac{2}{5-x} \qquad y = \frac{17-3x}{5-x} \qquad \boldsymbol{y = \frac{3x-17}{x-5}}$$

L'equazione del luogo rappresentato è:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} \frac{5}{3}\sqrt{x^2-9} & se\ x < -3 \\ \sqrt{15+2x-x^2} & se -3 \le x < 1 \\ 4 - \frac{3}{5}\sqrt{12\,x - x^2 - 11} & se\ 1 \le x < 6 \\ \frac{3x-17}{x-5} & se\ x \ge 6 \end{cases}}$$

4. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$\sqrt{\frac{100-4x^2}{9}} < \frac{2}{9}x + \frac{10}{9}$$



Innanzi tutto l'equazione, semplificata, può diventare:

$$\sqrt{25 - x^2} < \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = \sqrt{25 - x^2} \qquad e \qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

La prima funzione è equivalente al sistema: $\begin{cases} y \ge 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

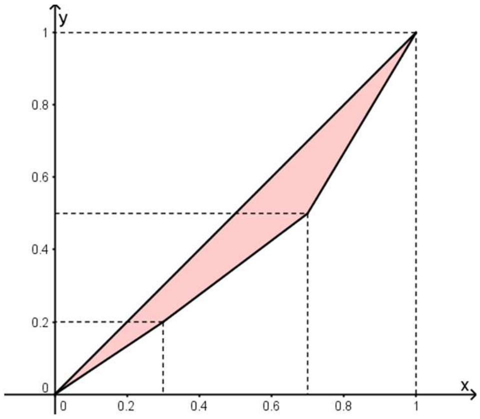
che rappresenta la metà superiore di una circonferenza con centro coincidente con l'origine e raggio 5.
La seconda funzione corrisponde ad una retta.
Dal grafico possiamo dedurre la soluzione:

$$\boldsymbol{4 < x \le 5}$$

5. Determina il coefficiente di concentrazione relativo al fenomeno rappresentato nel grafico seguente:

Per determinare il coefficiente di concentrazione, devo calcolare il rapporto tra l'area di concentrazione e l'area di massima concentrazione. L'area di massima concentrazione corrisponde all'area sottesa dalla bisettrice di primo e terzo quadrante, ovvero: $\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$, mentre l'area di concentrazione è quella colorata nella figura a lato. Perciò:

$$R=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{0,3\cdot 0,2}{2}+\frac{0,4\cdot 0,7}{2}+\frac{0,3\cdot 1,5}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\mathbf{0,21}$$



6. Il consumo di energia elettrica delle imprese artigiane di Porto Tolle nel mese di maggio 2002 ha avuto la seguente distribuzione:

Consumo (kWh)	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
Numero imprese	20	32	14	8	6

Calcola la media aritmetica e la classe mediana.
Determina lo scarto semplice medio e la deviazione standard.

Per determinare la media aritmetica, devo procedere con una media pesata – date le diverse frequenze – ma visto che si tratta di classi devo considerare il valore intermedio:

$$M=\frac{250\cdot 20+350\cdot 32+450\cdot 14+550\cdot 8+650\cdot 6}{20+32+14+8+6}=\mathbf{385}$$

In totale ho 60 imprese artigiane, quindi la mediana la trovo facendo la media tra la trentesima e la trentunesima impresa. Questo corrisponde alla classe **300-400**.

Lo scarto semplice medio è la media dei valori assoluti della differenza tra ogni valore e la media appena determinata:

$$S=\frac{|250-385|\cdot 20+|350-385|\cdot 32+|450-385|\cdot 14+|550-385|\cdot 8+|650-385|\cdot 6}{20+32+14+8+6}=\mathbf{95,5}$$

La deviazione standard è la media quadrata degli scarti:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(250-385)^2\cdot 20+(350-385)^2\cdot 32+(450-385)^2\cdot 14+(550-385)^2\cdot 8+(650-385)^2\cdot 6}{20+32+14+8+6}}=\mathbf{117,37}$$