Risolvi le seguenti equazioni:

1. $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)\right]=\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{8}\right)(4x-3)$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x\right)=\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{8} \qquad 0\,x=0 \qquad \boldsymbol{equazione\ indeterminata}$$

2. $2-\frac{5}{2}x-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}-x\,(2x+3)$

$$2-\frac{5}{2}x-2x^2+\frac{1}{4}x-x+\frac{1}{8}=\frac{9}{4}-2x^2-3x$$

$$-\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}x-x+3x=-2-\frac{1}{8}+\frac{9}{4} \qquad -\frac{1}{4}x=\frac{1}{8} \qquad \boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$$

3. $3x^2+4x-7=0$

$$3x^2-3x+7x-7=0$$

$$3x\,(x-1)+7\,(x-1)=0 \qquad (x-1)(3x+7)=0 \qquad x=\boldsymbol{1} \ \vee \ x=\boldsymbol{-\frac{7}{3}}$$

4. $\frac{7+x}{2x}=\frac{2-x}{1-2x}$

$$\frac{(7+x)(1-2x)-2x\,(2-x)}{2x\,(1-2x)}=0 \qquad C.A.: x\neq 0 \ \wedge \ x\neq\frac{1}{2}$$

$$7+x-14x-2x^2-4x+2x^2=0 \qquad x=\boldsymbol{\frac{7}{17}}$$

5. $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{1}{x^2-3x+2}$

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{(x-2)(x+1)}-\frac{1}{(x-2)(x-1)}=0 \qquad C.A.: x\neq\pm1 \ \wedge \ x\neq 2$$

$$3\,(x-2)+3\,(x-1)-(x+1)=0 \qquad 3x-6+3x-3-x-1=0$$

$$5x=10 \qquad x=2 \ \ non\ accettabile\ per\ le\ C.A. \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{equazione\ impossibile}$$

6. $2a^2x - 3\,(a-1) = -2a + ax\,(a+3)$

$2a^2x - 3a + 3 = -2a + a^2x + 3ax$

$a^2x - 3ax = a - 3$

$ax\,(a-3) = a - 3$

$\boldsymbol{Se\ a = 0 \qquad equazione\ impossibile}$

$\boldsymbol{Se\ a = 3 \qquad equazione\ indeterminata}$

$\boldsymbol{Se\ a \neq 0 \ \wedge\ a \neq 3 \qquad x = \frac{1}{a}}$

7. $a\,x = a + b$

$\boldsymbol{Se\ a = 0 \ \wedge\ b = 0 \qquad equazione\ indeterminata}$

$\boldsymbol{Se\ a = 0 \ \wedge\ b \neq 0 \qquad equazione\ impossibile}$

$\boldsymbol{Se\ a \neq 0 \qquad x = \frac{a+b}{a}}$

8. $\dfrac{5x-3}{5a+10} - \dfrac{2x+3}{a^2-a-6} = \dfrac{10x-3}{5a-15}$

$\dfrac{5x-3}{5(a+2)} - \dfrac{2x+3}{(a-3)(a+2)} = \dfrac{10x-3}{5(a-3)}$

$\dfrac{(a-3)(5x-3) - 5(2x+3) - (a+2)(10x-3)}{5(a+2)(a-3)} = 0 \qquad C.E.: a \neq -2 \quad \wedge \quad a \neq 3$

$5ax - 3a - 15x + 9 - 10x - 15 - 10ax + 3a - 20x + 6 = 0$

$-5x\,(a+9) = 0$

$\boldsymbol{Se\ a = -2 \ \vee\ a = 3 \qquad l'equazione\ perde\ significato}$

$\boldsymbol{Se\ a = -9 \qquad equazione\ indeterminata}$

$\boldsymbol{Se\ a \neq -2 \ \wedge\ a \neq 3 \ \wedge\ a \neq -9 \qquad x = 0}$

9. Data l'espressione $\quad 2 - x - a + 6x + \frac{1-a}{2} \quad$ determina per quale valore di a l'espressione vale 6 quando x vale -1.

Sostituisco $x = -1$ nell'equazione:

$$2 + 1 - a - 6 + \frac{1-a}{2} = -a - 3 + \frac{1-a}{2} = \frac{-3a-5}{2}$$

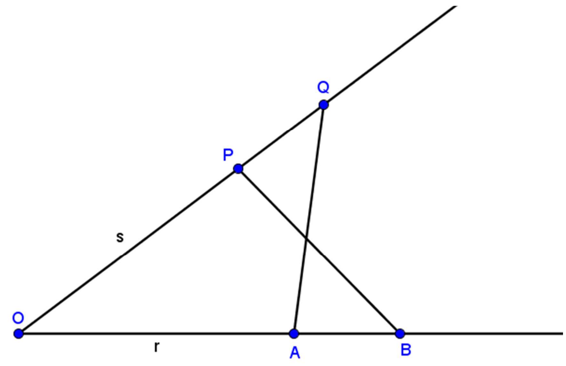
Pongo l'espressione uguale a 6 e determino così il valore di a:

$$\frac{-3a-5}{2} = 6 \qquad -3a - 5 = 12 \qquad a = -\boldsymbol{\frac{17}{3}}$$

10. È dato un angolo $\widehat{rs}$ di vertice O. Sul suo lato r considera i punti A e B e sul lato s i punti P e Q in modo che sia $OA \cong OP$ e $OB \cong OQ$. Dopo aver congiunto A con Q e B con P, dimostra la congruenza dei segmenti AQ e BP.

Ipotesi $O, A, B \in r$
$O, P, Q \in s$
$OA \cong OP$
$OB \cong OQ$

Tesi $AQ \cong BP$



Dimostrazione:

Consideriamo i triangoli OAQ e OBP. Essi hanno:

$OA \cong OP$ per ipotesi
$OB \cong OQ$ per ipotesi
$Q\hat{O}A \cong P\hat{O}B$ perché in comune

⇒ I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

⇒ $AQ \cong BP$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

c.v.d.

Risolvi i seguenti problemi tramite equazioni:

11. Il triplo di un numero, aumentato di 4 è uguale a metà del suo precedente aumentato di 4.

$$3x + 4 = \frac{x - 1 + 4}{2}$$

$$6x + 8 = x - 1 + 4$$

$$x = \mathbf{-1}$$

12. La somma delle diagonali di un rombo è di 60 cm e i $\frac{2}{3}$ della maggiore aggiunti alla metà della minore danno 36 cm. Determina l'area del rombo. (ti ricordo che l'area del rombo è data dal semiprodotto delle diagonali).

Diagonale minore: x
Diagonale maggiore: $60 - x$

$$\frac{2}{3}(60 - x) + \frac{1}{2}x = 36$$

$$40 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 36$$

$$-\frac{1}{6}x = -4 \qquad x = 24$$

Le due diagonali misurano, rispettivamente, 24 cm e 36 cm. Posso quindi determinare l'area:

$$A = \frac{24\ cm \cdot 36\ cm}{2} = \mathbf{432\ cm^2}$$

13. Trova un numero di due cifre, sapendo che la cifra delle unità supera di 2 la cifra delle decine e che il numero è il quadruplo della somma delle sue cifre.

Avendo indicato con x la cifra delle decine e con $x+2$ quella delle unità, il numero da determinare è:

$$10\,x + x + 2 = 11\,x + 2$$

$$11x + 2 = 4\,(x + x + 2)$$

$$11x + 2 = 8x + 8$$

$$x = 2$$

Il numero dato è: **24**