$$\int \frac{9\cdot 3^{4x-3}}{81^x}\,dx = \int \frac{3^2\cdot 3^{4x-3}}{3^{4x}}\,dx = \int \frac{1}{3}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x + c}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+x}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} + x^{1-\frac{5}{6}}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \boldsymbol{2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + c}$$

$$\int 5\sin^4 x\,(\sin^5 x + 3)^4 \cos x\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{5}\left(\sin^5 x + 3\right)^5 + c}$$

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^6+6x^5+9x^4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+6x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}\,dx = \boldsymbol{\sqrt[3]{x^3+3x^2} + c}$$

$$\int \frac{6x}{3x-2}\,dx = 2\int \frac{3x-2+2}{3x-2}\,dx = 2\int\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3x-2}\right)dx = \boldsymbol{2x + \frac{4}{3}\ln|3x-2| + c}$$

$$\int 2x\cos(x^2-3)\;dx = \boldsymbol{\sin\left(x^2-3\right) + c}$$

$$\int x^3 e^x\,dx = \qquad f(x)=x^3 \quad f'(x)=3x^2 \qquad g(x)=e^x \quad g'(x)=e^x$$

$$= x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx = \qquad f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x \qquad g(x)=e^x \quad g'(x)=e^x$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x\,dx = \qquad f(x)=x \quad f'(x)=1 \qquad g(x)=e^x \quad g'(x)=e^x$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6\int e^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c = \boldsymbol{e^x(x^3-3x^2+6x-6) + c}$$

$$\int \frac{7x}{x^2+5x-6}\,dx = \qquad \frac{A}{x+6}+\frac{B}{x-1} = \frac{7x}{x^2+5x-6} \qquad (A+B)\,x - A + 6B = 7x \qquad \begin{cases} A+B=7 \\ -A+6B=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=6 \\ B=1 \end{cases}$$

$$= \int\left(\frac{6}{x+6}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \boldsymbol{6\ln|x+6| + \ln|x-1| + c}$$

$$\int \frac{1+\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+\tan^2 t}{t}\,2t\,dt = 2\int (1+\tan^2 t)\,dt = 2\tan t + c = \boldsymbol{2\tan\sqrt{x} + c}$$

$$\sqrt{x}=t \qquad x=t^2 \qquad dx = 2tdt$$

$$\int \frac{1}{x^2+8x+32}\,dx = \int \frac{1}{(x+4)^2+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x+4}{4}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+4}{4}\right)^2+1}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}\operatorname{atan}\left(\frac{x}{4}+1\right) + c}$$

1. Verifica che tutte le primitive di $f(x) = x^4 \ln(x-1)$ hanno un minimo relativo in $x = 2$.

La primitiva di $f(x)$ è $F(x)$. Per determinarne il minimo, dovremmo calcolarne la derivata prima e studiarne il segno, ma $F'(x) = f(x)$, perciò: $F'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$. Risolviamo, quindi, la disequazione:

$$x^4 \ln(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 2$$

Essendo la funzione decrescente per $x < 2$ e crescente per $x > 2$, la funzione ha un minimo relativo in $x = 2$.

2. Determina per quali valori di a, b e c si ha: $\int \frac{(a+6)\,x^3+cx}{ax+b}\,dx = x^3 - x^2$.

Dato che $\int \frac{(a+6)\,x^3+cx}{ax+b}\,dx = x^3 - x^2$, allora $D(x^3 - x^2) = \frac{(a+6)\,x^3+cx}{ax+b}$, ovvero:

$$3x^2 - 2x = \frac{(a+6)\,x^3 + cx}{ax+b} \quad \Rightarrow \quad (3x^2-2x)(ax+b) = (a+6)\,x^3 + cx$$

$$3ax^3 + (3b-2a)\,x^2 - 2bx = (a+6)\,x^3 + cx$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 3a = a+6 \\ 3b - 2a = 0 \\ -2b = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = 2} \\ \boldsymbol{c = -4} \end{cases}$$

3. Tra le primitive di $f(x) = \frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$, trova quella che ha per asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x + 3$ e verifica che interseca l'asse x nell'origine e nel punto di ascissa $-\frac{1}{2}$.

Calcolo l'integrale indefinito di $f(x)$ per ottenere le sue primitive:

$$F(x) = \int \frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{2(x^2-2x+1)-3}{(x-1)^2}dx = \int \left(2 - \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx = 2x + \frac{3}{x-1} + c$$

Calcolo $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x}$ e verifico che è uguale a 2, il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{3}{x(x-1)} + \frac{c}{x}\right) = 2$.

Calcolo $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (F(x) - 2x)$ e lo pongo uguale a 3, ordinata all'origine dell'asintoto obliquo dato:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(2x + \frac{3}{x-1} + c - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3}{x-1} + c\right) = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3$$

La funzione da determinare è: $F(x) = 2x + \frac{3}{x-1} + 3 = \frac{2x^2-2x+3+3x-3}{x-1} = \frac{2x^2+x}{x-1}$.

Metto a sistema la funzione ottenuta con l'equazione dell'asse x e verifico quanto detto dal testo:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2+x}{x-1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x(2x+1)}{x-1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad c.v.d.$$

4. Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.[1]
   A. Determina $f(x)$.
   B. Determina le coordinate degli eventuali massimi e minimi della funzione $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-1}$.
   C. Trova l'equazione della retta t tangente a $g(x)$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.
   D. Dopo aver determinato i numeri a e b, tali che $\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, calcola una primitiva della funzione $g(x)$.

A. Indicando con D il dividendo, con d il divisore, con R il resto e con Q il quoziente e sapendo che $D = dQ + R$:

$$f(x) = x(x^2-1) + x = x^3 - x + x = \boldsymbol{x^3}$$

B. Per quanto ricavato al punto precedente: $g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Ne calcoliamo la derivata per determinarne massimi e minimi:

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0$$

Non resta che studiare il segno del fattore $x^2 - 3$, visto che l'altro fattore e il denominatore della frazione sono positivi.

$$x^2 - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$$

Siccome la funzione è decrescente nell'intervallo compreso tra i due valori e crescente esternamente, la funzione ha un massimo per $x = -\sqrt{3}$ e un minimo per $x = \sqrt{3}$. Quindi il massimo è $\boldsymbol{M_1\left(-\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}$ e il minimo è $\boldsymbol{M_2\left(\sqrt{3};\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}$.

C. Determino l'ordinata del punto di ascissa $\frac{1}{2}$ e lo indico con A: $A\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6}\right)$. Determino il coefficiente angolare della retta tangente, sostituendo l'ascissa di A nella derivata (calcolata al punto B):

$$m = g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 3\right)}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = -\frac{11}{9}$$

Posso, quindi, determinare l'equazione della retta:

$$y + \frac{1}{6} = -\frac{11}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad t: \boldsymbol{y = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9}}$$

D. Determino i parametri richiesti, usando il principio di identità dei polinomi:

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{x}{x^2-1} \qquad (a+b)\,x - a + b = x \qquad \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{b = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Con le informazioni in nostro possesso, è facile determinare una primitiva della funzione:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int \left(x + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$$

Siccome il testo chiede di determinare una primitiva, scelgo quella con termine noto nullo:

$$\boldsymbol{G(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \ln|x^2-1|\right)}$$

[1] Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2002, dal problema 1 – ho modificato il testo togliendo lo studio completo di funzione previsto al punto b, visto che gli alunni della mia classe possono avvalersi della calcolatrice grafica.