1. Calcola il numero di abbinamenti possibili indicati di seguito:

A. Tra tutti i numeri di 10 cifre diverse tra loro, quanti sono i multipli di 10?
B. Tra tutti i numeri che possiamo formare con le cifre del numero 100 222, quanti sono i multipli di 10? I multipli di 100? E i numeri dispari?
C. Su un autobus vi sono 12 posti numerati. In quanti modi diversi cinque persone possono occuparli?
D. Quanti sono i numeri di 7 cifre, contenenti solo cifre pari, escluso lo zero?
E. Su un piano sono date 10 rette, in modo che tra esse non vi siano coppie di rette parallele. Quanti sono i punti di intersezione tra tali rette?
F. In quanti modi diversi si possono distribuire 7 cioccolatini indistinguibili a 4 bambini diversi?

A. Considerato che l'ultima posizione è bloccata dallo zero (si parla di multipli di 10), restano nove posizioni disponibili. Applico perciò la formula della permutazione semplice, considerato che nella prima posizione ho nove possibilità di scelta, nella seconda otto, nella terza sette e così via…

$$P_9 = 9! = \mathbf{362\,880}$$

B. Bloccando l'ultima cifra con lo 0, per ottenere i multipli di 10, mi restano cinque posizioni disponibili, in cui posso avere una ripetizione (visto che il 2 compare tre volte), si tratta perciò di una permutazione con ripetizione:

$$P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = \mathbf{20}$$

Per i numeri multipli di 100, devo considerare bloccate le ultime due cifre (entrambe con lo 0), perciò mi restano quattro posizioni disponibili, in cui posso avere una ripetizione:

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{3!} = \mathbf{4}$$

Per i numeri dispari, invece, devo bloccare l'ultima cifra con l'1 (unica cifra dispari), e mi restano cinque posizioni disponibili, in cui posso avere due ripetizioni (visto che il 2 compare tre volte e lo 0 due volte):

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = \mathbf{10}$$

C. Si tratta di una disposizione semplice, visto che ho 5 persone a disposizione e 12 possibilità diverse per farle sedere:

$$D_{12,5} = \frac{12!}{7!} = \mathbf{95\,040}$$

D. Ho quattro cifre a disposizione (tutte le cifre pari, escluso lo 0) e 7 posizioni diverse ed eventualmente le cifre si possono ripetere, perciò è una disposizione con ripetizione:

$$D'_{4,7} = 4^7 = \mathbf{16\,384}$$

E. Si tratta di una combinazione semplice:

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \mathbf{45}$$

F. Si tratta di una combinazione con ripetizione:

$$C'_{4,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = \mathbf{120}$$

2. Risolvi l'equazione $(x+2)! - 6x! = 6\,(x+1)!$

$(x+2)(x+1)\,x! - 6x! = 6\,(x+1)\,x! \qquad C.A.: x \geq 0$

$(x+2)(x+1) - 6 = 6\,(x+1) \qquad x^2 + 3x + 2 - 6 = 6x + 6$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{5} \quad \boldsymbol{accettabile} \\ -2 \quad non\ accettabile \end{array} \right.$$

3. Verifica l'identità: $\binom{n}{2} = (n-1)^2 - \binom{n-1}{2}$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = (n-1)^2 - \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{2\,(n-2)!} = (n-1)^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2\,(n-3)!}$$

Semplificando i termini indicati con lo stesso colore, otteniamo:

$$\frac{n^2-n}{2} = n^2 - 2n + 1 - \frac{n^2-3n+2}{2}$$

$$n^2 - n = 2n^2 - 4n + 2 - n^2 + 3n - 2 \qquad n^2 - n = n^2 - n \qquad \boldsymbol{c.v.d.}$$

4. Nello sviluppo di $(2x^2 + y)^7$ qual è il coefficiente di x^4y^5?

Consideriamo la formula del binomio di Newton $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$

Il termine richiesto è il sesto termine, per il quale devo scegliere $k = 5$:

$$\binom{7}{5}(2x^2)^2\,y^5 = \frac{7!}{5!\,2!}4\,x^4\,y^5 = 84\,x^4y^5$$

Ovvero il coefficiente richiesto è: **84**

5. Da un mazzo di 40 carte se ne estrae una. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

A. la carta è di cuori o di quadri
B. la carta è una figura o un tre
C. la carta è un cinque o una carta rossa.

$$p\,(cuori) = \frac{10}{40} \qquad p\,(quadri) = \frac{10}{40} \qquad p\,(figura) = \frac{12}{40} \qquad p\,(3) = \frac{4}{40} \qquad p\,(5) = \frac{4}{40} \qquad p\,(rosso) = \frac{20}{40}$$

A. $p(cuori \cup quadri) = p(cuori) + p(quadri) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

B. $p(figura \cup 3) = p(figura) + p(3) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \mathbf{\frac{2}{5}}$

C. $p(5 \cup rosso) = p(5) + p(rosso) - p\,(5rosso) = \frac{4}{40} + \frac{20}{40} - \frac{2}{40} = \mathbf{\frac{11}{20}}$

6. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono successivamente tre, rimettendo ogni volta la carta nel mazzo. Calcola la probabilità che siano in successione una di fiori, una di picche e una di quadri.

$$p\ (F) = \frac{10}{40} \qquad p\ (P) = \frac{10}{40} \qquad p\ (Q) = \frac{10}{40}$$

$$p(F \cap P \cap Q) = p(F) \cdot p(P) \cdot p\ (Q) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \mathbf{\frac{1}{64}}$$

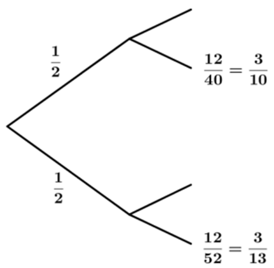
7. Si lanci dieci volte una moneta: calcola la probabilità che almeno una volta si presenti croce.

Si tratta di un'applicazione del teorema delle prove ripetute, con 10 lanci, la probabilità che almeno una volta si presenti croce è come chiedere l'evento complementare di nessuna testa. Tenuto conto che la probabilità che esca testa a ogni lancio è ½:

$$1 - p_{(0;10)} = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \mathbf{\frac{1023}{1024}}$$

8. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una carta da un mazzo di 40 carte, se esce croce si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità che la carta estratta sia una figura?

Schematicamente:



$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{13}\right) = \mathbf{\frac{69}{260}}$$

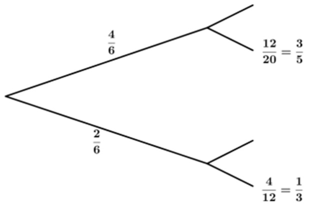
Ovvero:

$$p\ (U1) = \frac{1}{2} \qquad p\ (U2) = \frac{1}{2} \qquad p\ (D|U1) = \frac{3}{10} \qquad p\ (D|U2) = \frac{3}{13} \qquad p\ (D) = ?$$

$$p(D) = p(D|U1)p(U1) + p(D|U2)p(U2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{69}{260}}$$

9. Sono date due urne: la prima contiene 8 palline bianche e 12 blu, la seconda 8 palline bianche e 4 blu. Si lancia un dado e, se esce un divisore di 6, si estrae dalla prima urna, altrimenti dalla seconda. Sapendo che è stata estratta una pallina blu, qual è la probabilità che sia stata estratta dalla seconda urna?

Schematicamente:



$$p = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{5}{5+18} = \mathbf{\frac{5}{23}}$$

Ovvero:

$$p\,(U1) = \frac{4}{6} \qquad p\,(U2) = \frac{2}{6} \qquad p\,(B|U1) = \frac{3}{5} \qquad p\,(B|U2) = \frac{1}{3}$$

Per la soluzione uso la formula di Bayes:

$$p(U2|B) = \frac{p(B|U2)p(U2)}{p(B|U2)p(U2)+p(B|U1)p(U1)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{5}{5+18} = \mathbf{\frac{5}{23}}$$