1. Due cariche, di modulo, rispettivamente, Q e $4Q$, sono poste ad una distanza d l'una dall'altra. Determina il punto in cui il campo elettrico è nullo quando:
   A. hanno lo stesso segno;
   B. hanno segno opposto.

   A. Le due cariche hanno lo stesso segno. Supponiamo che abbiano segno positivo, ma la situazione è simile nel caso in cui abbiano segno negativo (in questa situazione, sarebbero semplicemente invertiti i due vettori $\overrightarrow{E_A}$ ed $\overrightarrow{E_B}$.

   Supponiamo che il punto in questione si trovi a distanza x dalla carica Q e $d - x$ dalla carica $4Q$. Il punto in questione sarà sicuramente tra le due cariche perché è l'unico caso in cui è possibile che i vettori campo elettrico abbiano verso opposto.

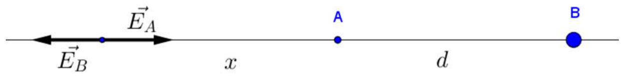
   Poniamo quindi uguali i due vettori in modulo:

$$E_A = E_B \qquad k_o \frac{Q}{x^2} = k_o \frac{4Q}{(d-x)^2} \qquad (d-x)^2 = 4x^2 \qquad d - x = 2x \qquad x = \boldsymbol{\frac{d}{3}}$$

   Il punto in cui il campo elettrico è nullo si trova a una distanza pari a $\frac{d}{3}$ dalla carica di modulo Q.

   B. Le due cariche hanno segno opposto. Supponiamo che abbia segno positivo la carica di modulo maggiore, ma la situazione è simile nel caso in cui abbiano segno scambiato (in questa situazione, sarebbero semplicemente invertiti i due vettori $\overrightarrow{E_A}$ ed $\overrightarrow{E_B}$.

   Supponiamo che il punto in questione si trovi a distanza x dalla carica Q e $d + x$ dalla carica $4Q$. Il punto in questione sarà sicuramente a sinistra della carica Q perché è l'unico caso in cui è possibile che i vettori campo elettrico abbiano verso opposto.



   Poniamo quindi uguali i due vettori in modulo:

$$E_A = E_B \qquad k_o \frac{Q}{x^2} = k_o \frac{4Q}{(d+x)^2} \qquad (d+x)^2 = 4x^2 \qquad d + x = 2x \qquad x = \boldsymbol{d}$$

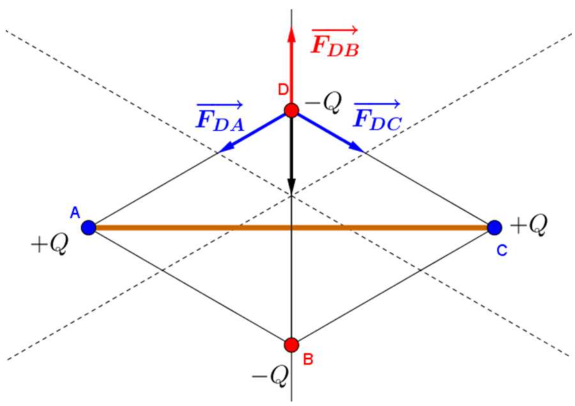
   Il punto in cui il campo elettrico è nullo si trova a una distanza pari a d dalla carica di modulo Q.

2. Una sbarretta isolante di lunghezza $2a$ porta ai suoi estremi due cariche puntiformi e uguali Q ed è posta nel vuoto. Come è mostrato in figura 1, altre due cariche negative, di valore $-Q$, sono posizionate in modo da formare due triangoli equilateri con un lato in comune. Verifica che la forza totale agente su ciascuna delle cariche negative è nulla.

Considero la carica posta in D (per questioni di simmetria, lo stesso ragionamento vale per la carica in B). Ho rappresentato le tre forze agenti in D per effetto delle due cariche positive (in blu) e di quella negativa (in rosso). Le quattro cariche hanno lo stesso modulo e le distanze AD, BD e CD sono uguali, perciò:

$$\overrightarrow{F_{DA}} = \overrightarrow{F_{DB}} = \overrightarrow{F_{DC}} = \vec{F}$$

Applicando la regola del parallelogramma ai due vettori blu, si viene a formare un rombo simile a quello più grande, perciò formato da due triangoli equilateri. Per questo motivo, sommando i due vettori blu, otteniamo quello nero, uguale in modulo a quelli di partenza (blu) ma con direzione BD. Questo vettore è uguale, quindi, al vettore $\overrightarrow{F_{DB}}$, ma ha verso opposto, perciò la loro somma è nulla.



In componenti:

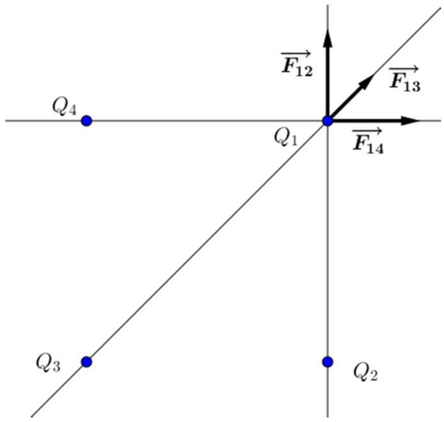
$$F_{DA_x} + F_{DC_x} + F_{DB_x} = -F_{DA}\cos 30° + F_{DC}\cos 30° + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0$$

$$F_{DA_y} + F_{DC_y} + F_{DB_y} = -F_{DA}\sin 30° - F_{DC}\sin 30° + F_{DB} = -\frac{F}{2} - \frac{F}{2} + F = 0$$

3. Quattro cariche puntiformi ($Q_1 = 2{,}0\ nC$, $Q_2 = Q_4 = 5{,}0\ nC$, $Q_3 = 3{,}0\ nC$) sono disposte in senso orario sui vertici di un quadrato di lato 40 cm. Determina direzione, verso e intensità della forza elettrica risultante sulla carica Q_1. Determina poi direzione, verso e intensità della forza elettrica risultante sulla carica Q_1 supponendo che le cariche siano immerse in acetone (costante dielettrica relativa 21).

Sia L il lato del quadrato.
Su Q_1 agiscono tre forze: la forza dovuta a Q_2, con direzione congiungente le due cariche e verso repulsivo, che in questo caso facciamo coincidere con la direzione positiva dell'asse y, perciò:

$$F_{12_x} = 0 \qquad F_{12_y} = k_o \frac{Q_1 Q_2}{L^2}$$



La forza dovuta a Q_4, con direzione congiungente le due cariche e verso repulsivo, che in questo caso facciamo coincidere con la direzione positiva dell'asse x, perciò:

$$F_{14_x} = k_o \frac{Q_1 Q_4}{L^2} \qquad F_{12_y} = 0$$

Considerato che le due cariche Q_2 e Q_4 hanno lo stesso modulo, allora

$$F_{12_y} = F_{14_x}$$

e quindi la somma di $\overrightarrow{F_{12}}$ e $\overrightarrow{F_{14}}$ dà una forza che forma esattamente $45°$ con l'asse x, ovvero che ha la stessa direzione della diagonale del quadrato, quindi coincidente con la direzione di $\overrightarrow{F_{13}}$.

$$F = F_{13} + \left|\overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{14}}\right| = F_{13} + \sqrt{F_{12}^2 + F_{14}^2} = k_o \frac{Q_1 Q_3}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k_o \frac{Q_1 Q_2}{L^2}\right)^2 + \left(k_o \frac{Q_1 Q_4}{L^2}\right)^2} =$$

$$= k_o \frac{Q_1 Q_3}{2L^2} + k_o \frac{Q_1 Q_2}{L^2}\sqrt{2} = k_o \frac{Q_1}{L^2}\left(\frac{Q_3}{2} + Q_2\sqrt{2}\right) = \mathbf{9,6 \cdot 10^{-7}}\ \boldsymbol{N}$$

Per determinare il modulo della forza agente nel caso in cui le cariche siano immerse in acetone:

$$F' = k \frac{Q_1}{L^2}\left(\frac{Q_3}{2} + Q_2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q_1}{L^2}\left(\frac{Q_3}{2} + Q_2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\varepsilon_r} k_o \frac{Q_1}{L^2}\left(\frac{Q_3}{2} + Q_2\sqrt{2}\right) = \frac{F}{\varepsilon_r} = \mathbf{4,6 \cdot 10^{-8}}\ \boldsymbol{N}$$

4. Nel vuoto, una pallina di massa $2{,}5\ g$ e carica elettrica $-670\ nC$ è sopra un piano orizzontale, ricoperto uniformemente di cariche con densità superficiale $-4{,}1 \cdot 10^{-7} C/m^2$, a una altezza di $78\ cm$. Calcola l'accelerazione della pallina. Quanto tempo impiega la pallina per cadere sul piano?

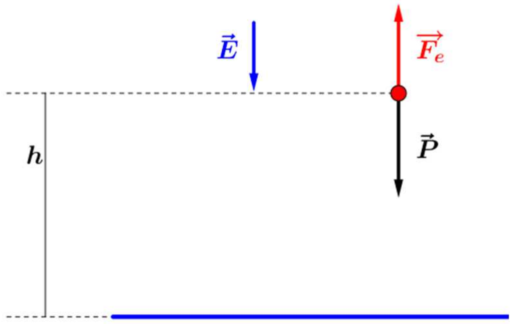
$m = 2{,}5\ g \qquad q = -670\ nC \qquad \sigma = -4{,}1 \cdot 10^{-7} C/m^2 \qquad h = 0{,}78\ m \qquad a? \qquad t?$

La pallina è soggetta, come indicato nella figura, a due forze: una è la forza peso, perciò diretta verso il basso, l'altra è la forza elettrica e, visto che la carica in questione è negativa, ha verso opposto rispetto al campo elettrico (diretto verso il basso visto che il piano è carico negativamente).
Perciò la forza totale è data dalla somma vettoriale delle due forze, ovvero dalla loro differenza in modulo:

$$F = P - F_e = P - qE = mg - q\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Per la seconda legge della dinamica, la forza generica è data dal prodotto di massa per accelerazione, perciò dividendo per la massa, otteniamo l'accelerazione:

$$a = \frac{F}{m} = g - \frac{q}{m}\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \mathbf{3,6\ m/s^2}$$



Per determinare il tempo, basta usare la legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \mathbf{0,66\ s}$$

5. Un filo rettilineo, di lunghezza infinita, uniformemente carico, con una densità di carica lineare $3{,}1 \cdot 10^{-7} C/m$, è parallelo ed è ad una distanza di $50\ cm$ da una superficie piana isolante (di spessore trascurabile) uniformemente carica con densità di carica superficiale $4{,}1 \cdot 10^{-7} C/m^2$. A quale distanza dal filo il campo elettrico è nullo?

$\lambda = 3{,}1 \cdot 10^{-7}\ C/m \qquad d = 0{,}50\ m \qquad \sigma = 4{,}1 \cdot 10^{-7}\ C/m^2 \qquad r?$

Sia r la distanza dal filo carico del punto con campo elettrico nullo. In tale punto, come indicato dalla figura, i due campi elettrici avranno la stessa direzione, verso opposto e uguale modulo, perciò:

$$E_\lambda = E_\sigma$$

$$\frac{\sigma}{2\ \varepsilon_o} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\ r}$$

$$r = \frac{\lambda}{\sigma\pi} = \mathbf{0,24\ m}$$